# Autonomní systémy

## Definice, trajektorie, nulkliny

Petr Liška

Masarykova univerzita

19.02.2024

# Autonomní systém

## Definice

Vektorová diferenciální rovnice

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

kde

$$\mathbf{x} = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)^T$$

a

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)\big)^T$$

je definovaná na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, se nazývá *autonomní systém*. Oblast $\Omega$ se nazývá *fázový prostor*, proměnná $t$ se nazývá *čas*.

## Úmluva

Pokud nebude řečeno jinak, tak $\mathbf{f}$ je spojitá vektorová funkce a počáteční problém (1), $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ je jednoznačný pro libovolné $[t_0, \mathbf{x}_0] \in \mathbb{R} \times \Omega$. Řešením se rozumí úplné řešení.

# Trajektorie a základní vlastnost

Řešení $\mathbf{x} = \varphi(t)$ systému (1) můžeme interpretovat jako

1. graf funkce $\mathbf{x} = \varphi(t)$ v prostoru $\mathbb{R} \times \Omega$;
2. křivku v prostoru $\Omega$ danou parametricky $\mathbf{x} = \varphi(t)$.

V druhém případě se tato křivka nazývá *trajektorie*. Jedná se vlastně o kolmý průmět grafu funkce $\mathbf{x} = \varphi(t)$ z $\mathbb{R} \times \Omega$ do $\Omega$.

Uzavřená trajektorie se nazývá *cyklus*.

### Lemma

*Je-li* $\mathbf{x} = \varphi(t)$ *řešení rovnice* (1), *pak i* $\mathbf{x} = \varphi(t + c)$ *je řešení rovnice* (1).

# Tři základní otázky

1. Existují rovnovážné hodnoty

$$\mathbf{x}^\star = (x_1^\star, \dots, x_n^\star)^T$$

   takové, že $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^\star$ je řešením (1)?

2. Nechť $\varphi(t)$ je řešení (1). Předpokládejme, že $\psi(t)$ je druhé řešení (1) takové, že $\psi(0)$ je velmi blízko $\varphi(0)$. Zůstane $\psi(t)$ blízko $\varphi(t)$ i v budoucnu nebo se $\psi(t)$ odchýlí od $\varphi(t)$ pro $t \to \infty$?

3. Co se stane s řešením $\mathbf{x}(t)$ pro $t \to \infty$? Bude se blížit nějakému rovnovážnému stavu? Nebo alespoň třeba nějakému periodickému řešení?

# První otázka = stacionární bod

**Definice**

Bod $\mathbf{x}^\star$ takový, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{o}$, se nazývá *stacionární bod* (kritický, singulární, rovnovážný). Příslušné řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^\star$ se pak nazývá *stacionární řešení* (rovnovážné).

Stacionární bod je tedy řešením soustavy rovnic

$$\begin{gathered} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{gathered}$$

Množina řešení každé libovolné rovnice $f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$ se nazývá *$k$-tá nulklina*.

# Druhá otázka = stabilita

## Definice

Řešení $\mathbf{x}_0$ rovnice (1) se nazývá stabilní, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že každé řešení $\mathbf{x}$ rovnice (1) vyhovující podmínce

$$|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0(0)| < \delta$$

splňuje

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \varepsilon\,.$$

Není-li řešení $\mathbf{x}_0$ stabilní, řekneme, že je nestabilní.

Plně vyřešeno pro

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \tag{2}$$

kde $A$ je konstantní matice.

## Věta

*a) Každé řešení rovnice (2) je stabilní, když všechna vlastní čísla matice $A$ mají zápornou reálnou část.*

*b) Předpokládedejme, že všechna vlastní čísla matice $A$ mají nezápornou reálnou část a $\lambda_1 = \mathtt{i}\sigma_1, \ldots, \lambda_l = \mathtt{i}\sigma_l$, jsou kořeny s nulovou reálnou částí, přičemž kořen $\lambda_j$ má násobnost $k_j$. Potom každé řešení rovnice (2) je stabilní, když matice $A$ má $k_j$ lineárné nezávislých vlastních vektorů pro každé vlastní číslo $\lambda_j$.*

# Třetí otázka = vlastnosti trajektorií a charakteristika stacionárních bodů

**Věta**

*Nechť $\varphi$, $\psi$ jsou řešení rovnice (1). Pak jejich trajektorie buď splývají, nebo nemají ani jeden bod společný.*

**Věta**

*Nechť $\mathbf{x} = \varphi(t)$ je řešení (1). Jestliže $\varphi(t_0 + T) = \varphi(t_0)$ pro nějaké $t_0$ a $T > 0$, potom $\varphi(t + T) \equiv \varphi(t)$.*

Autonomní systém (1) tedy může mít trajektorie trojího typu:

1. Singulární body (odpovídají konstantním řešením).
2. Cykly (odpovídají nekonstantním periodickým řešením).
3. Trajektorie, které samy sebe neprotínají.

# Typy singulárních bodů v rovině

Uvažujme nyní autonomní systém v rovině

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3}$$

Singulární bod $x_0$ rovnice (3) se nazývá

*střed*, když existuje ryzí okolí $U$ bodu $x_0$ takové, že každým $a \in U$ prochází jediná uzavřená trajektorie, která obsahuje $x_0$ ve svém vnitřku;

*ohnisko*, když existuje ryzí okolí $U$ bodu $x_0$ takové, že bod $x(t)$ trajektorie $x$ vycházející z libovolného bodu $a \in U$ má tu vlastnost, že konverguje pro $t \to \infty$ nebo $t \to -\infty$ k $x_0$, a to tak, že velikost orientovaného úhlu vektoru $\overrightarrow{x_0 x(t)}$ od nějakého pevného vektoru $\overrightarrow{x_0 x_1}$ má nevlastní limitu;

*uzel*, když existuje ryzí okolí $U$ bodu $x_0$ takové, že pro bod $x(t)$ trajektorie $x$ vycházející z libovolného bodu $a \in U$ platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \qquad \text{nebo} \lim_{t\to-\infty} x(t) = x_0$$

a velikost orientovaného úhlu vektoru $\overrightarrow{x_0x(t)}$ od nějakého pevného vektoru $\overrightarrow{x_0x_1}$ má vlastní limitu;

*sedlo*, když existuje jen konečný počet trajektorií $x(t)$ takových, že

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \qquad \text{nebo} \lim_{t\to-\infty} x(t) = x_0$$

*bod rotace*, jestliže v libovolném okolí bodu $x_0$ existuje alespoň jeden cyklus, obsahující ve svém vnitřku bod $x_0$.