

# Autonomní systémy

Charakteristika stacionárních bodů, nelineární systémy

Petr Liška

Masarykova univerzita

26.2.2024

# Lineární autonomní systém

Uvažujme lineární autonomní systém, tj.

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (1)$$

## Věta

*Nechť  $A$  je regulární matice systému (1) a necht'  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou vlastní čísla matice  $A$ . Stacionární bod  $[0, 0]$  je*

- *nestabilní uzel, jsou-li  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  a  $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ ;*
- *stabilní uzel, jsou-li  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  a  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ ;*
- *sedlo, jsou-li  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  a  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ;*
- *nestabilní ohnisko, jsou-li  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  a  $\alpha > 0$ ;*
- *stabilní ohnisko, jsou-li  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  a  $\alpha < 0$ ;*
- *střed, jsou-li  $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$ .*

# Malá odbočka - asymptotická stabilita

## Definice

Řešení rovnice

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

se nazývá *asymptoticky stabilní*, když je stabilní a když ke každému  $t_1 \geq t_0$  existuje  $\delta = \delta(t_1) > 0$  tak, že pro každé řešení  $\mathbf{x}$  rovnice (2) splňující nerovnost  $|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_0(t_1)| < \delta$  platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| = 0.$$

## Věta

*Nulové řešení rovnice (1) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když každý kořen charakteristické rovnice matice  $A$  má zápornou reálnou část.*

# Nejjednodušší nelineární autonomní systém

Uvažujme systém

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

kde  $A$  je konstantní matice a  $\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|}$  je spojitá funkce taková, že  $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$   
a

$$\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0 \quad \text{pro } t \rightarrow 0.$$

## Věta

- Nechť všechna vlastní čísla matice  $A$  mají zápornou reálnou část, pak stacionární řešení  $x(t) \equiv 0$  rovnice (3) je asymptoticky stabilní.*
- Má-li alespoň jedno vlastní číslo matice  $A$  kladnou reálnou část, pak je stacionární řešení  $x(t) \equiv 0$  rovnice (3) nestabilní.*

## Věta (Routh-Hurwitz)

*Nechť*

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

*je polynom s reálnými koeficienty, tj.  $a_k \in \mathbb{R}$ . Všechny kořeny polynomu  $p$  mají zápornou reálnou část právě tehdy, když  $D_1 > 0$ ,  $D_2 > 0, \dots, D_n > 0$ , kde  $D_k$  je determinant matice řádu  $k$*

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & a_{2k-5} & a_{2k-6} & \cdots & a_k \end{vmatrix},$$

*kde  $a_k = 0$  pro  $k > n$ .*

Hurwitz, A.; *Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt.* Math. Ann. 46, 273–284 (1895).

# Takto šla historie

Uvažujme systémy

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + P(x, y) \\ y' &= cx + dy + Q(x, y)\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy\end{aligned}\tag{5}$$

## Věta (Grobman-Hartman)

*Nemá-li matice systému (5) čistě imaginární vlastní čísla a  $P$  a  $Q$  mají spojitě parciální derivace, pak existuje bijektivní zobrazení mezi trajektoriemi rovnice (4) a trajektoriemi rovnice (5) z okolí stacionárního bodu (4) do okolí bodu (0, 0).*

Hartman, P; *A lemma in the theory of structural stability of differential equations*. Proc. A.M.S. 11 (4), 1960. 610–620.

## Věta

*Budte  $P, Q$  funkce spojité v okolí počátku, které zde mají spojité parciální derivace. Nechť  $ad - bc \neq 0$  a nechť existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|P(x,y)| + |Q(x,y)|}{(|x| + |y|)^{1+\varepsilon}} = 0.$$

*Pak je počátek uzel/ohnisko/sedlo pro systém (4), je-li stejného typu pro systém (5). Je-li však počátek střed pro systém (5), je buď bodem rotace nebo ohniskem pro systém (4).*

Coddington, E. A., Levinson, N.; Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1965.

H. Poincaré (1892), I. Bendixson (1901), O. Perron (1922), H. Dulac (1934), A. Wintner (1946).

# Metoda linearizace

Pro funkci dvou proměnných

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - a) + \\ + \frac{1}{2}[f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - a) + f_{yy}(a, b)(y - a)^2] + \dots$$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \dots$$

Pro funkci více proměnných analogicky

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \dots,$$

kde

$$[D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)]_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$

je *Jacobiho matice*.



# Metoda linearizace

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

Uvažujme

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (6)$$

kde  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  je hladká a necht'  $\mathbf{x}^*$  je stac. bod, tj.  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , pak

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \dots$$

a

$$\mathbf{x}' \approx D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \approx D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

$$\mathbf{y}' = J\mathbf{y} \quad (7)$$

## Věta

Předpokládejme, že funkce  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  jsou spojité a mají spojité parciální derivace druhého řádu v okolí bodu  $[x_0, y_0]$  a že  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ . Nechť

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak je bod  $[x_0, y_0]$  izolovaným singulárním bodem systému

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y). \end{aligned} \tag{8}$$

Přitom je bod  $[x_0, y_0]$  asymptoticky stabilní/nestabilní uzel/ohnisko nebo sedlo pro systém (8), je-li počátek singulárním bodem stejného typu pro systém

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} y \\ y' &= \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} y. \end{aligned} \tag{9}$$

Je-li však počátek střed pro systém (9), je bod  $[x_0, y_0]$  buď bod rotace nebo ohnisko pro systém (8)