

# $\omega$ - limitní množina a její struktura

## Hlavně Poincaré-Bendixsonova věta

Petr Liška

Masarykova univerzita

18.3.2024

$$x' = f(x), \quad f \in C(D, \mathbb{R}^m), D \subseteq \mathbb{R}^m \text{ je otevřená} \quad (1)$$

## Definice

Množina  $M \subseteq D$  se nazývá *invariantní*, jestliže pro každé řešení  $x(t)$  rovnice (1) splňující  $x(0) \in M$  platí  $x(t) \in M$  pro  $t \in (-\infty, \infty)$ . Je-li tato vlastnost platná pouze pro  $t \geq 0$  (resp.  $t \leq 0$ ), nazývá se  $M$  *pozitivně* (resp. *negativně*) *invariantní*.

Označme  $C^+$  trajektorii rovnice (1) odpovídající řešení  $x(t)$ ,  $t \geq t_0$ . A podobně  $C^-$  je trajektorie odpovídající řešení  $x(t)$ ,  $t \leq t_0$ .  $C^+$  a  $C^-$  nazýváme *polotrajektorie* (kladná a záporná).

## Definice

Nechť  $C^+$  je trajektorie řešení  $x(t)$  rovnice (1).  $\omega$ -limitním bodem trajektorie  $C^+$  rozumíme libovolný bod  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  takový, že existuje posloupnost  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $t_n \rightarrow \infty$  tak, že  $x(t_n) \rightarrow x_0$  pro  $n \rightarrow \infty$ . Množina  $\Omega(C^+)$  všech  $\omega$ -limitních bodů trajektorie  $C^+$  se nazývá  $\omega$ -limitní množina trajektorie  $C^+$ .

## Definice

Nechť  $C^-$  je trajektorie řešení  $x(t)$  rovnice (1).  $\alpha$ -limitním bodem trajektorie  $C^-$  rozumíme libovolný bod  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  takový, že existuje posloupnost  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $t_n \rightarrow -\infty$  tak, že  $x(t_n) \rightarrow x_0$  pro  $n \rightarrow \infty$ . Množina  $A(C^-)$  všech  $\alpha$ -limitních bodů trajektorie  $C^-$  se nazývá  $\alpha$ -limitní množina trajektorie  $C^-$ .

## Co plyne z definice?

1.

$$\Omega(C^+) = \{x_0 \in \mathbb{R}^m \mid \forall T \text{ a } \varepsilon > 0, \exists t > T : |x(t) - x_0| < \varepsilon\}$$

2.

$$\Omega(C^+) \subseteq \overline{C^+}, \quad A(C^-) \subseteq \overline{C^-}$$

3.  $\alpha$ -limitní množina je vlastně  $\omega$ -limitní množina s časem běžícím pozpátku

4. Je-li  $C = C^+ \cup C^-$  můžeme definovat limitní množinu

$$\Lambda(C) = A(C^-) \cup \Omega(C^+)$$

## Věta

Množina  $\Omega(C^+)$  je uzavřená. Má-li  $C^+$  v  $D$  kompaktní uzávěr pak je množina  $\Omega(C^+)$  kompaktní a souvislá.

## Věta

Nechť  $x_0 \in D \cap \Omega(C^+)$ . Je-li  $x_0(t)$  úplné řešení

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

s maximálním intervalem existence  $(\omega_-, \omega_+)$ , pak  $x_0(t) \in \Omega(C^+)$  pro  $t \in (\omega_-, \omega_+)$ .

Má-li navíc  $C^+$  v  $D$  kompaktní uzávěr, existuje řešení  $x_0(t)$  pro  $t \in (-\infty, \infty)$  a pro jeho trajektorii  $C_0$  platí

$$C_0 \cup A(C_0^-) \cup \Omega(C_0^+) \subseteq \Omega(C^+).$$

## Důsledek

*Je-li  $\Omega(C^+) \subseteq D$ , pak  $\Omega(C^+)$  je invariantní množina.*

## Důsledek

*Jestliže se množina  $\Omega(C^+)$  skládá z jediného bodu  $x_0 \in D$ , pak  $x_0$  je stacionárním bodem a  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$  pro řešení  $x(t)$  jemuž odpovídá trajektorie  $C^+$ .*

## Věta

*Nechť  $V \subset D$  je neprázdná pozitivně invariantní kompaktní konvexní množina rovnice (1). Pak (1) má alespoň jeden singulární bod v množině  $V$ .*

## Definice

Trajektorie odpovídající řešení  $x(t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ , rovnice (1) takovému, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_2, \quad x_1 \neq x_2$$

kde  $x_1, x_2$  jsou stacionární body rovnice (1), se nazývá *heteroklinická*. Trajektorie odpovídající řešení  $x(t)$  rovnice (1) takovému, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_1,$$

kde  $x_1$  je stacionární bod rovnice (1) se nazývá *homoklinická*. Trajektorie  $C_0$  odpovídající úplnému řešení  $x_0(t)$ ,  $t \in (\omega_-, \omega_+)$  taková, že  $C_0 \subseteq \Omega(C^+)$ ,  $C^+ \not\subseteq C_0$  pro nějakou polotrajektorii  $C^+$ , se nazývá  $\omega$ -*limitní trajektorii*. Jestliže kromě toho je řešení  $x_0(t)$  periodické, nazývá se trajektorie  $C_0$   $\omega$ -*limitním cyklem*.

$$x' = f(x), \quad f \in C(D, \mathbb{R}^2), D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ je otevřená} \quad (2)$$

### Věta

*Nechť  $x(t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ , je periodické řešení rovnice (2), jehož trajektorie je cyklus  $C$  ležící v  $D$  i se svým vnitřkem  $\Gamma$ . Pak  $\Gamma$  obsahuje stacionární bod rovnice (2).*

### Věta (Poincaré–Bendixson)

*Nechť  $C^+$  je trajektorie řešení  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , rovnice (2), mající kompaktní uzávěr v  $D$ . Předpokládejme, že  $\omega$ -limitní množina  $\Omega(C^+)$  neobsahuje stacionární body. Pak  $\Omega(C^+)$  je cyklus.*



# Struktura $\omega$ -limitní množiny dvourozměrného autonomního systému obsahující stacionární body

## Věta

*Nechť  $C^+$  je trajektorie řešení  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , rovnice (2), mající kompaktní uzávěr v  $D$ . Předpokládejme, že  $\omega$ -limitní množina  $\Omega(C^+)$  obsahuje konečný počet  $k \geq 1$  stacionárních bodů.*

*Jestliže se množina  $\Omega(C^+)$  skládá z jediného bodu  $x_0 \in D$ , pak  $x_0$  je stacionárním bodem a  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$  pro řešení  $x(t)$  jemuž odpovídá trajektorie  $C^+$ .*

*Je-li  $\Omega(C^+)$  tvořena více než jedním bodem, pak  $\Omega(C^+)$  sestává ze stacionárních bodů  $x^{[1]}, x^{[2]}, \dots, x^{[k]}$  a konečného nebo spočetného systému trajektorií  $C_0: x = x_0(t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$  neprocházejících stacionárními body a mající vlastnost, že limity  $x_0(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x_0(t)$  existují a splývají s jedním z bodů  $x^{[1]}, x^{[2]}, \dots, x^{[k]}$ .*

## $\varepsilon - \delta$ definice asymptotické orbitální stability

### Definice

Nechť  $C_\omega: x = x_\omega(t), t \in (-\infty, \infty)$ , je cyklus rovnice (2) odpovídající periodickému řešení  $x_\omega(t)$  s periodou  $w > 0$ . Cyklus  $C_\omega$  se nazývá *orbitálně stabilní* (orbitálně stabilní zvnějšku/zvnitřku) pro  $t \rightarrow \infty$ , jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  takové, že jestliže bod  $x_0$  leží ve vzdálenosti menší než  $\delta$  od cyklu  $C_\omega$  (a ve vnějšku/vnitřku cyklu), pak polotrajektorie  $C_0^+: x = x_0(t)$  řešení  $x_0(t)$  počátečního problému  $x' = f(x), x(0) = x_0$  zůstává pro všechna  $t \geq 0$  v  $\varepsilon$ -okolí cyklu  $C_\omega$ .

Cyklus  $C_\omega$  se nazývá *asymptoticky orbitálně stabilní*

(zvnějšku/zvnitřku) pro  $t \rightarrow \infty$ , jestliže existuje  $\delta > 0$  takové, že jestliže bod  $x_0$  leží ve vzdálenosti menší než  $\delta$  od cyklu  $C_\omega$  (a ve vnějšku/vnitřku  $C_\omega$ ) pak pro polotrajektorii  $C_0^+: x = x_0(t)$  řešení  $x_0(t)$  počátečního problému  $x' = f(x), x(0) = x_0$  platí  $\Omega(C_0^+) = C_\omega$ .

## Věta

Nechť  $C_\omega: x = x_\omega(t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ , je cyklus rovnice (2) odpovídající periodickému řešení  $x_\omega(t)$  s periodou  $\omega > 0$ . Pak

- i) pro to, aby  $C_\omega$  byl cyklus asymptoticky orbitálně stabilní zvnějšku rovnice (2) pro  $t \rightarrow \infty$ , je nutné a stačí, aby trajektorie  $C_\omega$  byla  $\omega$ -limitní množinou pro polotrajektorii  $C_0^+$  některého řešení  $x_0(t)$ ,  $t \geq 0$ , ležícího ve vnějšku  $C_\omega$ ;
- ii) pro to, aby  $C_\omega$  byl cyklus orbitálně stabilní zvnějšku pro  $t \rightarrow \infty$  je nutné a stačí, aby trajektorie  $C_\omega$  byla  $\omega$ -limitní množinou pro některou polotrajektorii  $C_0^+$  ležící ve vnějšku  $C_\omega$  nebo aby pro každé  $\varepsilon > 0$  existovala uzavřená trajektorie rovnice (2) ležící ve vnější části  $\varepsilon$ -okolí trajektorie  $C_\omega$ .

## Shrnutí (asi se hodí)

$$x' = f(x), \quad f \in C(D, \mathbb{R}^2), \quad D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ je otevřená} \quad (3)$$

1. Je-li trajektorie ohraničená pro  $t \rightarrow \infty$ , pak její  $\omega$ -limitní množina obsahuje buď stacionární bod nebo cyklus.
2. Cyklus musí mít ve svém vnitřku stacionární bod.
3. Obsahuje-li  $\omega$ -limitní množina stabilní uzel nebo ohnisko, pak obsahuje jen tento bod.
4.  $\omega$ -limitní množina neobsahuje žádné nestabilní stacionární body.