

Autonomní systémy

Jak spočítat parametry?

Petr Liška

Masarykova univerzita

06.04.2024

Richardsonova teorie konfliktů

$$x' = ky - \alpha x + g$$

$$y' = lx - \beta y + h$$

$$[x_0, y_0] = \left[\frac{kh + \beta g}{\alpha\beta - kl}, \frac{lg + \alpha h}{\alpha\beta - kl} \right]$$

$$\alpha\beta - kl > 0 \quad \implies \quad \text{stabilní}$$

$$\alpha\beta - kl < 0 \quad \implies \quad \text{nestabilní}$$

První oprava

$$x = U - U_0, \quad y = V - V_0$$

- U je rozpočet Jedslandu a U_0 je export z Jedslandu do Anderslandu,
- V je rozpočet Anderslandu a V_0 je export z Anderslandu do Jedslandu.

Hodnoty „nenávisti“

- g , h se v podstatě nedají měřit,
- nejsou to ani spojité funkce,
- jsou ale přibližně konstantní v dlouhodobém horizontu.

Odhady dle Richardsona - α, β

- první pozorování – jednotky α, β, k a l jsou $[\frac{1}{\text{čas}}]$,
- je-li $y = 0$ a $g = 0$ pak

$$x(t) = e^{-\alpha(t-t_0)}x(t_0)$$

a odtud

$$x(t_0 + \alpha^{-1}) = \frac{x(t_0)}{e},$$

- α^{-1} je volební období parlamentu Jedslandu (tj. $\alpha = 0,2$ pro Velkou Británií).

Odhady dle Richardsona - k, l

- uvažme hypotetický případ, kdy $g = 0$ a $y = y_1$, tj.

$$x' = ky_1 - \alpha,$$

- je-li zároveň někdy $x = 0$, pak

$$\frac{1}{k} = \frac{y_1}{x'},$$

a odtud

$$x = ky_1 t \quad \Longrightarrow \quad x \left(\frac{1}{k} \right) = y_1$$

- vzhledem k situaci v letech 1933–1936 v Německu uvažujeme, že efekt α a g se vynuluje a $k = 0,3$ pro Německo
- k je přímo úměrné velikosti ekonomiky

Situace před I. světovou válku a naše odhady

- Jedesland = Francie+Rusko
- Andersland = Německo + Rakousko-Uhersko
- $k = l = 0,9$
- $\alpha = \beta = 0,2$

$$\alpha\beta - kl = \alpha^2 - k^2 = -0,77$$

Jak odhady korespondují s realitou?

$$\frac{d}{dt}(x + y) = (k - \alpha)(x + y) + g + h$$

$$\frac{d}{dt}(U+V) = (k-\alpha) \left\{ U + V - \left[U_0 + V_0 - \frac{g+h}{k-\alpha} - \frac{1}{k-\alpha} \frac{d}{dt}(U_0 + V_0) \right] \right\}$$

	1909	1910	1911	1912	1913
Francie	48,6	50,9	57,1	63,2	74,7
Rusko	66,7	68,5	70,7	81,8	92,0
Německo	63,1	62,0	62,5	68,2	95,4
R-U	20,8	23,4	24,6	25,5	26,9
$\Delta(U + V)$	5,6	10,1	23,8	50,3	
$(U + V)$	202,0	209,8	226,8	263,8	

$$\Delta(U + V) = 0,73(U + V + 194)$$

Lanchasterovy modely bitev

změna bojové síly = posily – operační ztráty – bojové ztráty

Konvenční boj:

$$x' = -ay + f(t)$$

$$y' = -bx + g(t)$$

Konvenční vs guerilla:

$$x' = -cxy + f(t)$$

$$y' = -dx + g(t)$$

Bitva o Iwo Jimu 19.2.1945–26.3.1945

Celkové ztráty Spojených států na ostrově Iwo Jima				
	Mrtví a pohřešovaní	Zranění	Bojová únava	Celkem
Námořní pěchota	5 931	17 272	2 648	25 851
Námořní jednotky:				
Lodě a letadla	633	1 158		1 791
Zdravotní jednotky	195	529		724
Seabees	51	218		37
Doktoři a zubaři	2	12		14
Armádní jednotky	9	28		37
Celkem	6 821	19 217	2 648	28 686

Ztráty Japonska na ostrově Iwo Jima

Obranné jednotky (odhad)		Zajatci	Mrtví
21 000	Námořní pěchota	216	20 000
	Armáda	867	
	Součet	1 083	

$$x' = -ay + f(t)$$

$$y' = -bx$$

$$f(t) = \begin{cases} 54000 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \\ 6000 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & 3 \leq t < 5 \\ 13000 & 5 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 21500$$

$$x(t) = -\sqrt{\frac{a}{b}}y_0 \cosh \sqrt{abt} + \int_0^t \cosh \sqrt{ab}(t-s)f(s) ds$$

$$y(t) = y_0 \cosh \sqrt{abt} - \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^t \sinh \sqrt{ab}(t-s)f(s) ds$$

Výpočet parametru b

Integrováním druhé rovnice obdržíme

$$y(s) - y_0 = -b \int_0^s x(t) dt$$

a odtud

$$b = \frac{y_0 - y(s)}{\int_0^s x(t) dt} = \frac{y_0 - y(36)}{\int_0^{36} x(t) dt} = \frac{21\,500}{\int_0^{36} x(t) dt},$$

$$\int_0^{36} x(t) dt \approx \sum_{i=1}^{36} x(i) \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{21\,500}{2\,037\,000} = 0,0106.$$

Výpočet parametru a

Integrovaním první rovnice obdržíme

$$x(28) = -a \int_0^{28} y(t) dt + \int_0^{28} f(t) dt = -a \int_0^{28} y(t) dt + 73\,000$$

a odtud

$$a = \frac{73\,000 - 52\,735}{\int_0^{28} y(t)} \approx \frac{73\,000 - 52\,735}{\sum_{j=1}^{28} y(j)}.$$

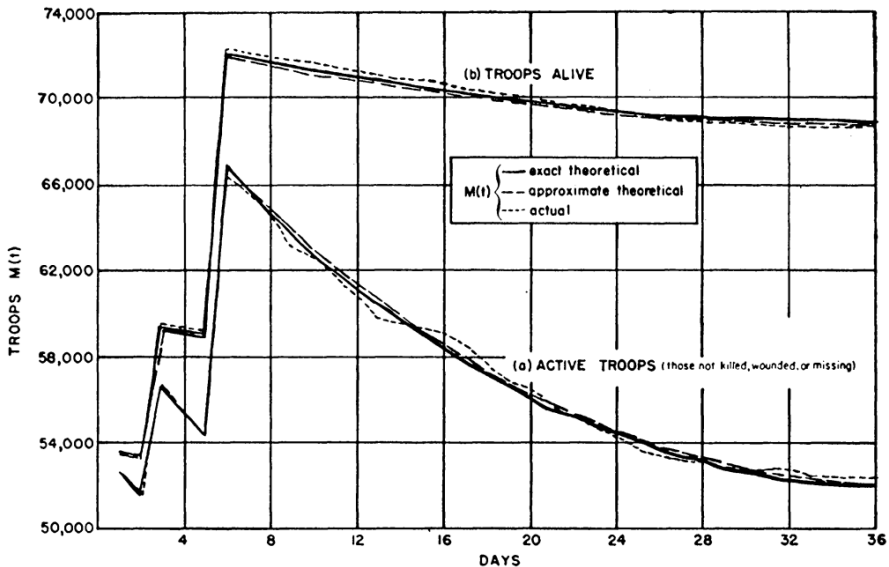
Neznámou funkci y aproximujeme

$$y(j) = y_0 - b \int_0^j x(t) dt \approx 21\,500 - b \sum_{i=1}^j x(i).$$

$$a = \frac{20\,265}{372\,500} = 0,0544.$$

Engel, J.H. A verification of Lanchester's law, *Operations Research*, 2, 1954, 163–171.

Porovnání s realitou



Model konkurence dvou druhů

$$x' = (a - bx - cy)x$$

$$y' = (\alpha - \beta y - \gamma x)y$$

	<i>saccharomyces</i>	Mixed Population	<i>schizosaccharomyces</i>	Mixed Population
Age in hours	Volume of yeast	Volume of yeast	Volume of yeast	Volume of yeast
6	0.37	0.375	-	0.291
16	8.87	3.99	1.00	0.98
24	10.66	4.69	-	1.47
29	12.50	6.15	1.70	1.46
40	13.27	-	-	-
48	12.87	7.27	2.73	1.71
53	12.70	8.30	-	1.84
72	-	-	4.87	-
93	-	-	5.67	-
117	-	-	5.80	-
141	-	-	5.83	-
7.5	1.63	0.923	-	0.371
15.0	6.20	3.082	1.27	0.630
24.0	10.97	5.780	-	1.220
31.5	12.60	9.910	2.33	1.112
33.0	12.90	9.470	-	1.225
44.0	12.77	10.570	-	1.102
51.5	12.90	9.883	4.56	0.961