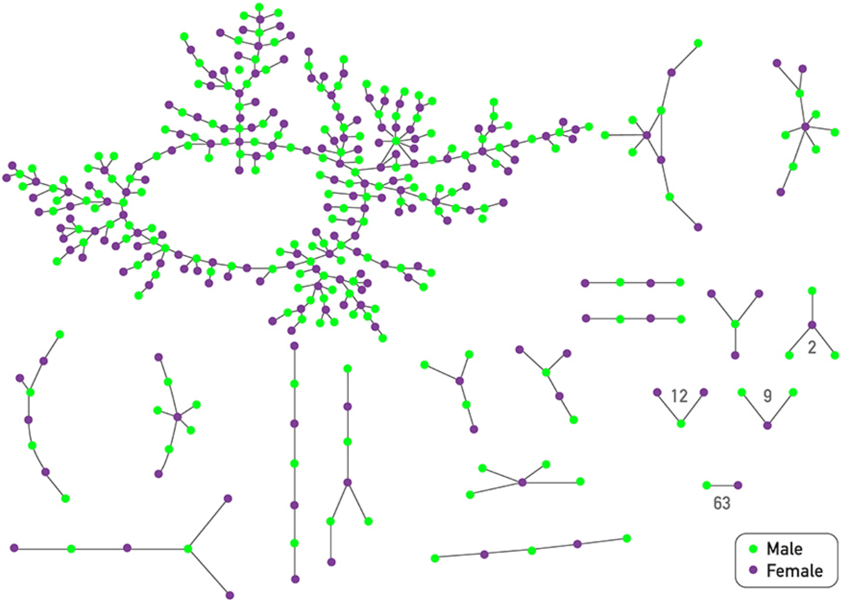
# Teorie epidemií

## Modelování a teorie sítí

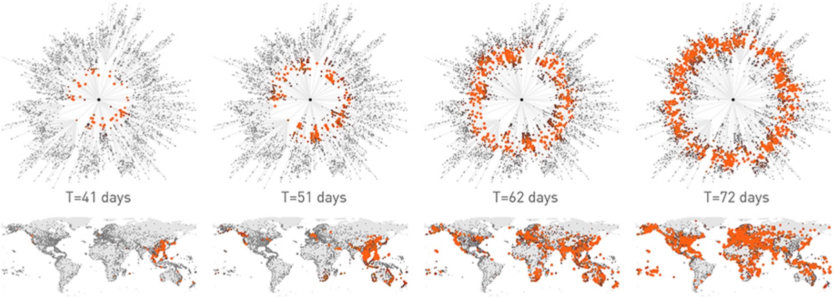
Petr Liška

http://networksciencebook.com/

22.04.2024



2
12
9
63
Male
Female



T=41 days
T=51 days
T=62 days
T=72 days

# Co je to síť?

Síť má dva základní parametry:

- *Počet uzlů*, nebo-li $N$, reprezentující počet bodů v systému. K rozeznání jednotlivých uzlů si je značíme pomocí $i = 1, 2, ..., N$. Tento parametr často nazýváme *velikost sítě*.
- *Počet vazeb*, nebo-li $L$, reprezentující celkový počet interakcí mezi uzly. Vazby zpravidla nebývají označené.

Síť se nazývá *orientovaná*, jestliže všechny její vazby jsou orientované, tzn. že mají mezi uzly pevně daný směr. V opačném případě mluvíme o síti *neorientované*, čili nerozlišujeme směr jejích vazeb.

Graf je uspořádána dvojice $G = (V, E)$, kde

- $V$ je množina vrcholů,
- $E \subseteq \{[x, y] \mid x, y \in V, x \neq y\}$.

# Reálné sítě

| *Síť* | *Uzly* | *Vazby* | *Ori* | *N* | *L* |
|---|---|---|---|---|---|
| Herecká | herci | společný film | N | 702 388 | 29 397 908 |
| Vědecká | vědci | společný článek | N | 23 133 | 93 437 |
| WWW (část) | stránky | URL adresy | A | 325 729 | 1 497 134 |
| Citační | články | citace | A | 449 673 | 4 689 479 |

# Základní charakteristiky

- *stupeň* $k_i$ – vyjadřuje počet vazeb, které daný uzel $i$ má k ostatním uzlům; v případě orientované sítě rozlišujeme *vstupní* $k_i^{in}$ a *výstupní stupeň* $k_i^{out}$.
- *celkový počet vazeb*

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} k_i,$$

$$L = \sum_{i=1}^{N} k_i^{in} = \sum_{i=1}^{N} k_i^{out}$$

- *průměrný stupeň*

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i = \frac{2L}{N}$$

$$\langle k^{in} \rangle = \langle k^{out} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i^{in} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i^{out} = \frac{L}{N}$$

# Základní charakteristiky

- *rozložení stupňů* $p_k$ – označuje pravděpodobnost, že náhodně vybraný uzel v síti má stupeň $k$, tedy platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Označíme-li $N_k$ počet uzlů mající stupeň $k$ v sítí o $N$ uzlech, obdržíme:

$$p_k = \frac{N_k}{N}.$$

Potom máme jiný vztah pro $p_k$

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kN_k}{N} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k \,.$$

# Náhodná síť

## Náhodná síť - definice podle Gilberta

Každý pár z $N$ uzlů je spojen s pravděpodobností $p$.

Náhodnou síť sestrojíme pomocí následujících kroků:

- začneme s $N$ izolovanými uzly
- vybereme náhodnou dvojici uzlů a vygenerujeme náhodné číslo mezi 0 a 1, pak v případě, že toto číslo překročí hodnotu $p$, spojíme dané uzly vazbou, v opačném případě je necháme nespojené
- předchozí krok opakujeme pro každou z $\frac{N(N-1)}{2}$ dvojic uzlů

Pravděpodobnost, že má náhodná síť přesně $L$ vazeb, je součinem tří výrazů:

- $p^L$, což vyjadřuje pravděpodobnost, že $L$ pokusů o připojení $N\,(N-1)/2$ dvojic uzlů skončí úspěšným připojením
- $(1-p)^{\frac{N\,(N-1)}{2}-L}$, což je pravděpodobnost, že zbývajících $\frac{N\,(N-1)}{2}-L$ pokusů neskončí úspěšným připojením
- $\binom{\frac{N\,(N-1)}{2}}{L}$, což je kombinační číslo, které nám vyjadřuje, kolika způsoby můžeme $L$ vazeb rozmístit mezi $N\,(N-1)/2$ dvojic uzlů

$$p_L = \binom{\frac{N(N-1)}{2}}{L} p^L (1-p)^{\frac{N(N-1)}{2}-L}$$

Očekávaný počet hran

$$\langle L \rangle = \sum_{L=0}^{\frac{N(N-1)}{2}} L p_L = p \frac{N(N-1)}{2}$$

je tedy součin pravděpodobnosti $p$ (vyjadřující, že dva uzly jsou spojeny) a $L_{max} = \frac{N(N-1)}{2}$ (vyjadřující počet párů, které chceme spojit).

Odsud průměrný stupeň uzlu je

$$\langle k \rangle = \frac{2\langle L \rangle}{N} = p(N-1)$$

# Distribuce uzlů

Pravděpodobnost, že uzel $i$ v náhodné síti má přesně $k$ vazeb je součinem tří výrazů:

$p^k$, což je pravděpodobnost, že $k$ vazeb daného uzlu existuje

$(1-p)^{N-1-k}$, což je pravděpodobnost, že $(N-1-k)$ zbývajících vazeb chybí

$\binom{N-1}{k}$ nám říká, kolika způsoby můžeme z potenciálních $N-1$ vazeb (které uzel může mít) vybrat $k$ z nich

Distribuce uzlů tedy je

$$p_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \approx \mathrm{e}^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$

# Svět je malý

$$N(d) \approx 1 + \langle k \rangle + \langle k \rangle^2 + \cdots + \langle k \rangle^d = \frac{\langle k \rangle^{d+1} - 1}{\langle k \rangle - 1} \approx \langle k \rangle^d$$

$$N(d_{max}) \approx N \approx \langle k \rangle^{d_{max}}$$

$$d_{max} \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}$$

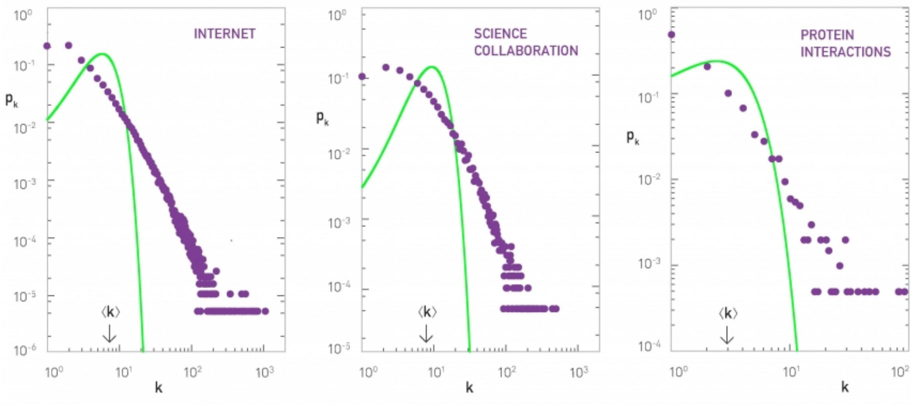
$$\langle d \rangle \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}$$

$$\langle d \rangle \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle} = \frac{\ln(8 \cdot 10^9)}{\ln 10^3} = 3{,}3$$

# Reálná data

| *Síť* | $\langle k \rangle$ | $\langle d \rangle$ | $d_{max}$ | $\ln N / \ln \langle k \rangle$ |
|---|---|---|---|---|
| Herecká | 83,71 | 3,91 | 14 | 3,04 |
| Vědecká | 8,08 | 5,35 | 15 | 4,81 |
| WWW (část) | 4,60 | 11,27 | 93 | 8,31 |
| Citační | 10,43 | 11,21 | 42 | 5,55 |

# Kde je problém?



# Bezškálová síť

## Definice

*Bezškálová síť* je taková síť, jejíž rozložení stupňů se řídí mocninným zákonem, tj.

$$p_k \sim k^{-\gamma}\,.$$

$$p(k) = (\gamma - 1) k_{\mathrm{min}}^{\gamma-1} k^{-\gamma}$$

$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

# Momenty

$$\langle k^n \rangle = \sum_{k_{min}}^{\infty} k^n p_k \approx \int_{k_{min}}^{\infty} k^n p(k) \, \mathrm{d}k$$

Nižší momenty mají důležitou interpretaci:

- $n = 1$: První moment odpovídá průměrnému stupni, čili $\langle k \rangle$.
- $n = 2$: Druhý moment , $\langle k^2 \rangle$, je důležitý při výpočtu *rozptylu* $\sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$. Jeho druhá odmocnina, $\sigma$, se nazývá *směrodatná odchylka*.
- $n = 3$: Třetí moment, $\langle k^3 \rangle$, určuje *šikmost* rozložení a říká nám, jak symetrické je $p_k$ kolem průměru $\langle k \rangle$.

# Význam bezškálovosti

$$\langle k^n \rangle = C \, \frac{k_{max}^{n-\gamma+1} - k_{min}^{n-\gamma+1}}{n - \gamma + 1}$$

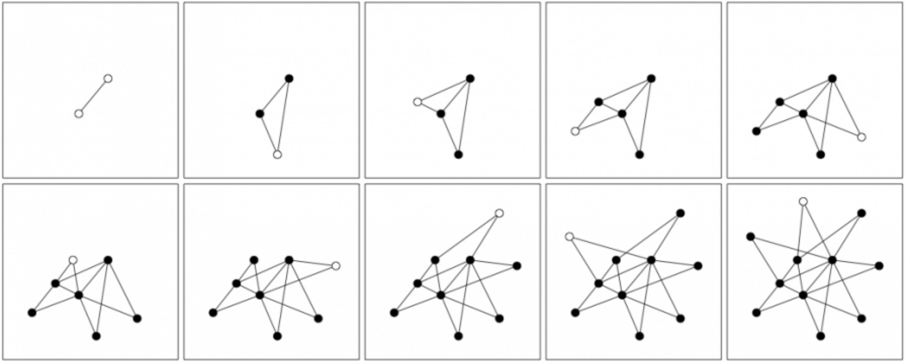
Pro $k_{max} \to \infty$ dostaneme

- Pokud $n - \gamma + 1 \leq 0$, potom s rostoucím $k_{max}$ jde člen $k_{max}^{n-\gamma+1}$ do nuly. Proto jsou všechny momenty, které splňují $n \leq \gamma - 1$, konečné.
- Pokud $n - \gamma + 1 > 0$, potom s $k_{max} \to \infty$ jde i $\langle k^n \rangle$ do nekonečna. Proto všechny momenty větší než $\gamma - 1$ divergují.

## Bezškálová síť, Barabási-Albert model

**Růst** - v každém kroku přidáme uzel s $m$ novými spojeními
**Preferential attachment** - pravděpodobnost $\prod(k)$, že spojení nového uzlu bude navázáno na starý uzel $i$ je dána

$$\prod(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$



# Jaký je stupeň uzlu?

$$\frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}t} = m\prod(k_i) = m\frac{k_i}{\sum_{j=1}^{N-1} k_j} = \frac{mk_i}{2mt - m} = \frac{k_i}{2t-1} \approx \frac{k_i}{2t}$$

$$\frac{\mathrm{d}k_i}{k_i} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad k_i(t_i) = m$$

$$k_i(t) = m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

# Jaká je distribuce stupňů uzlů?

Kolik uzlů má stupeň menší než $k$?

$$m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}} < k \Longrightarrow t_i > t\left(\frac{m}{k}\right)^2$$

Dohromady máme $N = m_0 + t \approx t$ uzlů. Pravděpodobnost, že vybereme uzel stupně menšího než $k$

$$P(k) = 1 - \left(\frac{m}{k}\right)^2$$

Distribuce pak je

$$p_k = \frac{\partial P(k)}{\partial k} = \frac{2m^2}{k^3}$$

# Friendship paradox

$$k_n(k_i) = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}$$

Pro náhodné sítě platí

$$k_n(k_i) = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = \frac{\langle k \rangle (1 + \langle k \rangle)}{\langle k \rangle} = 1 + \langle k \rangle$$

Pro bezškálovou síť platí

$$\langle k^2 \rangle \to \infty \quad \text{pro} \quad N \to \infty$$

| Síť | $N$ | $L$ | $\langle k \rangle$ | $\langle k^2 \rangle$ |
|---|---|---|---|---|
| Internet | 192 244 | 609 066 | 6,34 | 240,1 |
| Vědci | 23 133 | 93 439 | 8,08 | 178,2 |
| Herci | 702 388 | 29 397 908 | 83,71 | 47 353 |

# Jednoduchý SIS model

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \beta\langle k\rangle S(t)I(t) - \mu I(t) = \beta\langle k\rangle I(t)(1 - I(t)) - \mu I(t), \qquad I(0) = I_0.$$

$$I = \left(1 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}\right)\frac{C\mathrm{e}^{(\beta\langle k\rangle - \mu)t}}{1 + C\mathrm{e}^{(\beta\langle k\rangle - \mu)t}}, \quad C = \frac{I_0}{1 - I_0 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}}$$

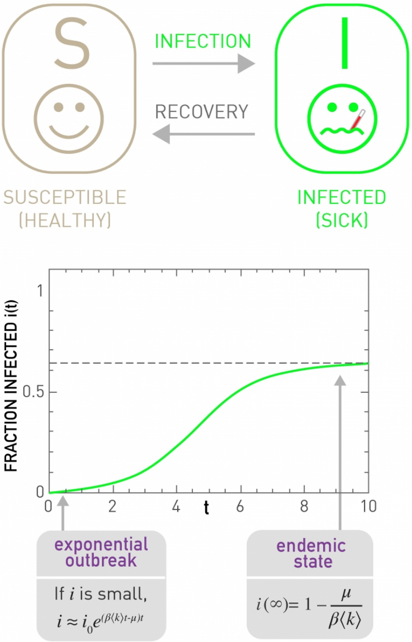
Dvě možnosti:

- **Endemický stav** ($\mu < \beta\langle k\rangle$)

$$I(\infty) = 1 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}$$

- **Nemoc je vyhlazena** ($\mu > \beta\langle k\rangle$)

$$I(\infty) = 0$$


S
INFECTION
RECOVERY
I
SUSCEPTIBLE
(HEALTHY)
INFECTED
(SICK)
FRACTION INFECTED i(t)
1
0.5
0
0
2
4
t
6
8
10
exponential outbreak
If $i$ is small,
$i \approx i_0 e^{(\beta\langle k\rangle t\text{-}\mu)t}$
endemic state
$i(\infty) = 1 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}$

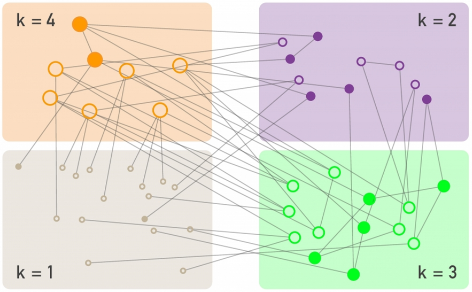
# Charakteristický čas a reprodukční číslo

Charakteristický čas $I(\tau) = \frac{1}{\mathrm{e}}$

$$\tau = \frac{1}{\mu\left(\frac{\beta\langle k\rangle}{\mu} - 1\right)} = \frac{1}{\mu(R_0 - 1)}$$

| Nemoc | $R_0$ |
|---|---|
| spalničky | 12–18 |
| černý kašel | 12–17 |
| záškrt | 6–7 |
| neštovice | 5–7 |
| dětská obrna | 5–7 |
| zarděnky | 5–7 |
| příušnice | 4–7 |
| HIV/AIDS | 2–5 |
| SARS | 2–5 |
| chřipka | 2–3 |

# Model epidemie na síti




$$\frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t} = \beta(1 - I_k)k\Theta_k - \mu I_k$$

$$\Theta_k = \frac{\sum_{k'} k' p_{k'} I_{k'}}{\sum_k k p_k} = \frac{\sum_{k'} k' p_{k'} I_{k'}}{\langle k \rangle}$$

$$\tau = \frac{\langle k \rangle}{\beta \langle k^2 \rangle - \mu \langle k \rangle}$$