Variace, kombinace, ...

Pro každé reálné číslo r a každé nezáporné celé číslo k definujeme klesající faktoriál

$$[r]_k = \begin{cases} 1 & \text{pokud } k = 0, \\ r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-k+1) & \text{pokud } k > 0 \end{cases}$$

a rostoucí faktoriál

$$[r]^k = \begin{cases} 1 & \text{pokud } k = 0, \\ r \cdot (r+1) \cdot (r+2) \cdot \dots \cdot (r+k-1) & \text{pokud } k > 0. \end{cases}$$

Zejména pak pro každé nezáporné celé číslo n máme definován jeho faktoriál $n! = [n]_n$.

Pro každé reálné číslo r a každé nezáporné celé číslo k definujeme binomický koeficient

$$\binom{r}{k} = \frac{[r]_k}{k!}.$$

Pro tyto binomické koeficienty máme následující poznatky.

Tvrzení.

Pro libovolné reálné číslo r a libovolné nezáporné celé číslo k platí vztahy

(i) $\binom{-r}{k} = (-1)^k \cdot \binom{r+k-1}{k}$,

(ii) $\binom{r}{k} + \binom{r}{k+1} = \binom{r+1}{k+1}$.

Důkaz.

Podle definic klesajících a rostoucích faktoriálů a binomických koeficientů dostáváme:

(i) $$\binom{-r}{k} = \frac{[-r]_k}{k!} = \frac{(-1)^k \cdot [r]^k}{k!} = (-1)^k \cdot \binom{r+k-1}{k},$$

(ii) $$\binom{r}{k} + \binom{r}{k+1} = \frac{[r]_k}{k!} + \frac{[r]_{k+1}}{(k+1)!} = \frac{(k+1)\cdot[r]_k + [r]_k\cdot(r-k)}{(k+1)!}$$
$$= \frac{(r+1)\cdot[r]_k}{(k+1)!} = \frac{[r+1]_{k+1}}{(k+1)!} = \binom{r+1}{k+1}.$$

□

Poznamenejme, že pro každé reálné číslo r podle definice binomických koeficientů platí $\binom{r}{0} = 1$, zejména $\binom{0}{0} = 1$, a pro každé kladné celé číslo k platí $\binom{0}{k} = 0$. Tyto hraniční podmínky spolu s rekurentní formulí v části (ii) předchozího tvrzení umožňují postupně počítat všechny hodnoty $\binom{n}{k}$ pro jakákoliv nezáporná celá čísla n, k.

V následujících definicích a tvrzeních nechť n, k jsou libovolná nezáporná celá čísla a nechť M je libovolná konečná množina mající n prvků.

Uspořádané k-tice $(m_1, \ldots, m_k)$ vzájemně různých prvků $m_1, \ldots, m_k \in M$ se nazývají variace k-té třídy v množině M. Lze je také popsat jako prostá zobrazení $\{1, \ldots, k\} \to M$.

Tvrzení.

Počet všech možných variací k-té třídy v množině M je roven číslu $[n]_k$. □

Zejména tedy počet všech permutací množiny M je roven číslu $n!$.

Uspořádané k-tice $(m_1, \ldots, m_k)$ libovolných prvků $m_1, \ldots, m_k \in M$ se nazývají variace k-té třídy v množině M s opakováním. Lze je také popsat jako libovolná zobrazení $\{1, \ldots, k\} \to M$.

Tvrzení.

Počet všech variací k-té třídy v množině M s opakováním je roven číslu n^k (klademe-li $0^0 = 1$). □

Libovolné k-prvkové podmnožiny $L \subseteq M$ se nazývají kombinace k-té třídy v množině M. Je možné je také popsat jako libovolná zobrazení $f : M \to \{0, 1\}$ splňující $\sum_{m \in M} f(m) = k$. Zobrazení f odpovídající podmnožině $L \subseteq M$ je takzvané charakteristické zobrazení podmnožiny L.

Tvrzení.

Počet všech možných kombinací k-té třídy v množině M je roven číslu $\binom{n}{k} = \frac{[n]_k}{k!}$.

Důkaz.

Plyne z předminulého tvrzení, neboť z jedné k-prvkové podmnožiny $L \subseteq M$, tedy z jedné kombinace k-té třídy v množině M lze vytvořit celkem $k!$ variací k-té třídy v množině M. Tyto variace se dostanou jako libovolné permutace prvků podmnožiny L. □

Uvažme nyní libovolná zobrazení $g : M \to \{0, 1, 2, \dots\}$ splňující podmínku $\sum_{m \in M} g(m) = k$. Tato zobrazení nazýváme kombinace k-té třídy v množině M s opakováním. Lze si je představit tak, že pro každý prvek $m \in M$ udává hodnota $g(m)$ počet výskytů prvku m v dané kombinaci.

Tvrzení.

Počet všech kombinací k-té třídy v množině M s opakováním je roven číslu $\binom{n+k-1}{k}$.

Důkaz.

Bez jakékoliv újmy můžeme předpokládat, že $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Je-li $k = 0$, je uvedený počet kombinací roven 1. Je-li $k > 0$, ale $n = 0$, je tento počet roven 0. Jestliže $k > 0$ a $n > 0$, vezměme dále množinu $\overline{M} = \{1, 2, \dots, n + k - 1\}$. Na obou množinách M i $\overline{M}$ uvažme obvyklé uspořádání čísel. Při tomto uspořádání lze libovolné kombinace k-té třídy zapisovat jako vzestupně uspořádané k-tice čísel; v případě kombinací s opakováním jde o vzestupně uspořádané k-tice ne nutně různých čísel.

Při tomto zápisu kombinací je předpisem

$$(m_1, m_2, m_3, \dots, m_k) \mapsto (m_1, m_2 + 1, m_3 + 2, \dots, m_k + k - 1)$$

očividně dána vzájemně jednoznačná korespondence mezi kombinacemi s opakováním k-té třídy v množině M a obyčejnými kombinacemi k-té třídy v množině $\overline{M}$. Množina $\overline{M}$ má $n + k - 1$ prvků a zbývá už jen se odvolat na předchozí tvrzení. $\square$

Nyní následuje binomická věta.

Věta.

V okruhu $\mathbb{Z}[x, y]$ všech polynomů dvou proměnných x, y nad okruhem $\mathbb{Z}$ všech celých čísel pro libovolné kladné celé číslo n platí

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Důkaz.

Po roznásobení mocniny $(x+y)^n$ vznikne pro každou hodnotu k celkem $\binom{n}{k}$ sčítanců tvaru $x^k y^{n-k}$, neboť podle předminulého tvrzení právě tolika způsoby je možno vybrat k-prvkovou podmnožinu těch závorek $(x+y)$, z nichž se při tvorbě součinu $x^k y^{n-k}$ uplatní proměnná x. □

Důsledek.

Pro libovolné nezáporné celé číslo n platí rovnosti

(i) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

(ii) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n > 0. \end{cases}$$

Důkaz.

Obě tvrzení (i) i (ii) jsou pro $n = 0$ zřejmá a pro $n > 0$ plynou z binomické věty dosazením 1 za x i y, respektive -1 za x a 1 za y. □

Pro libovolné kladné celé číslo ℓ a pro libovolná nezáporná celá čísla n a $k_1, \ldots, k_\ell$ splňující $k_1 + \cdots + k_\ell = n$ definujeme polynomický koeficient

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell} = \frac{n!}{k_1! \cdot \cdots \cdot k_\ell!}.$$

V následujícím tvrzení ozřejmíme kombinatorický význam polynomických koeficientů. Půjde o zobecnění předminulého tvrzení týkajícího se binomických koeficientů. Buď opět M libovolná konečná množina mající n prvků.

Tvrzení.

Nechť $k_1, \ldots, k_\ell$ jsou nezáporná celá čísla taková, že je splněno $k_1 + \cdots + k_\ell = n$. Pak počet všech zobrazení $h : M \to \{1, \ldots, \ell\}$ splňujících podmínky $|h^{-1}(i)| = k_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, \ell$ je roven číslu $\binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell}$.

Důkaz.

Postupujeme indukcí vzhledem k číslu ℓ. Pro $\ell = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť dále ℓ je přirozené číslo takové, že $\ell > 1$. Uvažme libovolné zobrazení $h : M \to \{1, \ldots, \ell\}$ splňující dané požadavky. Položme $L = h^{-1}(\ell)$. Podle předminulého tvrzení existuje $\binom{n}{k_\ell}$ možností, jak může vypadat tato podmnožina L množiny M. Uvažme dále zúžení $h|_{M-L}$ zobrazení h na podmnožinu $M - L$. Podle indukčního předpokladu je možno toto zúžení $h|_{M-L}$ vytvořit $\binom{n-k_\ell}{k_1, \ldots, k_{\ell-1}}$ způsoby.

Odtud pro celkový počet všech možných zobrazení h splňujících dané požadavky vychází

$$\binom{n}{k_\ell} \cdot \binom{n-k_\ell}{k_1,\ldots,k_{\ell-1}} = \frac{n!}{k_\ell!\cdot(n-k_\ell)!} \cdot \frac{(n-k_\ell)!}{k_1!\cdot\cdots\cdot k_{\ell-1}!} = \binom{n}{k_1,\ldots,k_\ell}. \qquad \square$$

V kontextu tohoto kombinatorického významu polynomických koeficientů bývá někdy také řeč o takzvaných permutacích s opakováním. Jde o libovolné uspořádané n-tice vytvořené z ℓ prvků, v nichž pro každé $i = 1,\ldots \ell$ má i-tý prvek celkem k_i výskytů.

Pro polynomické koeficienty máme následující rekurentní formuli.

Tvrzení.

Nechť ℓ je kladné celé číslo, nechť $k_1,\ldots,k_\ell$ jsou nezáporná celá čísla a nechť $n = k_1 + \cdots + k_\ell$. Je-li $n > 0$, pak platí

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_\ell} = \sum \binom{n-1}{k_1,\ldots,k_{j-1},k_j-1,k_{j+1},\ldots,k_\ell},$$

kde suma je přes všechna $j = 1,\ldots,\ell$ taková, že $k_j > 0$.

Důkaz.

Přímým výpočtem vyjde

$$
\begin{aligned}
\sum \binom{n-1}{k_1, \dots, k_{j-1}, k_j - 1, k_{j+1}, \dots, k_\ell}
&= \sum \frac{(n-1)!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_{j-1}! \cdot (k_j - 1)! \cdot k_{j+1}! \cdot \dots \cdot k_\ell!} \\
&= \sum \frac{(n-1)! \cdot k_j}{k_1! \cdot \dots \cdot k_{j-1}! \cdot k_j! \cdot k_{j+1}! \cdot \dots \cdot k_\ell!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot \sum k_j}{k_1! \cdot \dots \cdot k_\ell!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_\ell!} = \binom{n}{k_1, \dots, k_\ell}.
\end{aligned}
$$

□

Dostáváme se nakonec k následujícímu zobecnění binomické věty.

Věta.

Pro libovolná kladná celá čísla n a ℓ v okruhu $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\ell]$ všech polynomů ℓ proměnných nad okruhem $\mathbb{Z}$ platí

$$
(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \sum \binom{n}{k_1, \dots, k_\ell} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{k_\ell},
$$

kde suma je přes všechny uspořádané ℓ-tice $(k_1, \ldots, k_\ell)$ nezáporných celých čísel splňující $k_1 + \cdots + k_\ell = n$.

Důkaz.

Vede se analogická úvaha jako v důkazu binomické věty s odkazem na kombinatorický význam polynomických koeficientů. □

Důsledek.

Pro libovolné nezáporné celé číslo n a pro libovolné kladné celé číslo ℓ platí rovnost

$$\sum \binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell} = \ell^n,$$

kde suma je přes všechny uspořádané ℓ-tice $(k_1, \ldots, k_\ell)$ nezáporných celých čísel splňující $k_1 + \cdots + k_\ell = n$.

Důkaz.

Pro $n = 0$ je tvrzení zřejmé a pro $n > 0$ plyne z předchozí věty dosazením 1 za všechny proměnné $x_1, \ldots, x_\ell$. □