Stirlingova čísla

Rozeznáváme Stirlingova čísla 1. druhu a Stirlingova čísla 2. druhu. Stirlingova čísla 1. druhu jsou definována následovně. Buď x proměnná. Pak pro libovolné nezáporné celé číslo n je klesající faktoriál

$$[x]_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

(klademe $[x]_0 = 1$) polynomem v proměnné x stupně n, který lze vyjádřit ve tvaru

$$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} x^k$$

pro jisté celočíselné koeficienty $s_{n,k}$. Tyto koeficienty $s_{n,k}$ pro všechna nezáporná celá čísla n, k se nazývají Stirlingova čísla 1. druhu.

Tvrzení.

Stirlingova čísla 1. druhu jsou dána počátečními hodnotami

$$s_{0,0} = 1,\ s_{n,0} = 0 \text{ pro } n > 0,\ s_{0,k} = 0 \text{ pro } k > 0$$

a rekurentní formulí

$$s_{n+1,k} = s_{n,k-1} - n s_{n,k}$$

platnou pro všechna nezáporná celá čísla n a všechna kladná celá čísla k.

Důkaz.

Uvedené počáteční hodnoty ihned plynou z definice Stirlingových čísel 1. druhu. Pokud jde o uvedenou rekurentní formuli, uvědomme si, že $[x]_{n+1} = [x]_n(x-n)$. Podle definice je hodnota $s_{n+1,k}$ koeficientem u x^k v polynomu $[x]_{n+1}$. S ohledem na právě uvedené vyjádření polynomu $[x]_{n+1}$ je tento koeficient roven koeficientu u x^{k-1} v polynomu $[x]_n$ zmenšenému o n-násobek koeficientu u x^k v polynomu $[x]_n$. To však znamená, že hodnota $s_{n+1,k}$ je rovna hodnotě $s_{n,k-1} - ns_{n,k}$. To je ale právě dokazovaná rekurentní formule. □

Zaměňme nyní ve výše uvedené formuli definující Stirlingova čísla 1. druhu proměnnou x za $-x$. Dostaneme tak formuli

$$[-x]_n = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k}(-x)^k,$$

čili formuli

$$(-1)^n[x]^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k s_{n,k}x^k.$$

Ještě jinak zapsáno, máme formuli

$$[x]^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}s_{n,k}x^k$$

pro všechna nezáporná celá čísla n.

Poněvadž rostoucí faktoriál

$$[x]^n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$

(klademe $[x]^0 = 1$) má evidentně všechny koeficienty u kladných mocnin proměnné x kladné, znamená to, že pro všechna nezáporná celá čísla n, k je číslo $(-1)^{n+k}s_{n,k}$ absolutní hodnotou čísla $s_{n,k}$. Odtud je patrno, že všechna čísla $s_{n,1}, s_{n,2}, \ldots, s_{n,n}$ jsou nenulová a jejich znaménka se pravidelně střídají. Pro zmíněné absolutní hodnoty $|s_{n,k}|$ Stirlingových čísel 1. druhu pak platí obdoba předchozího tvrzení.

Tvrzení.

Absolutní hodnoty Stirlingových čísel 1. druhu jsou dány počátečními hodnotami

$$|s_{0,0}| = 1, \ |s_{n,0}| = 0 \ \textit{pro } n > 0, \ |s_{0,k}| = 0 \ \textit{pro } k > 0$$

a rekurentní formulí

$$|s_{n+1,k}| = |s_{n,k-1}| + n|s_{n,k}|$$

platnou pro všechna nezáporná celá čísla n a všechna kladná celá čísla k.

Důkaz.

Co se týče počátečních hodnot, ty plynou okamžitě z předchozího tvrzení. Pokud jde o danou rekurentní formuli, s využitím rekurentní formule z předchozího tvrzení dostáváme

$$|s_{n+1,k}| = (-1)^{n+k+1}s_{n+1,k} = (-1)^{n+k+1}(s_{n,k-1} - ns_{n,k})$$
$$= (-1)^{n+k-1}s_{n,k-1} + (-1)^{n+k}ns_{n,k} = |s_{n,k-1}| + n|s_{n,k}|,$$

což dává dokazovanou rekurentní formuli. □

Pro libovolná nezáporná celá čísla n, k označme symbolem $c_{n,k}$ počet všech permutací σ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ takových, že v rozkladu permutace σ na součin nezávislých cyklů se objevuje právě k cyklů (včetně cyklů délky 1, to jest včetně pevných bodů).

Tvrzení.

Čísla $c_{n,k}$ jsou dána počátečními hodnotami

$$c_{0,0} = 1,\ c_{n,0} = 0 \textit{ pro } n > 0,\ c_{0,k} = 0 \textit{ pro } k > 0$$

a rekurentní formulí

$$c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + nc_{n,k}$$

platnou pro všechna nezáporná celá čísla n a všechna kladná celá čísla k.

Důkaz.

Uvedené počáteční hodnoty plynou ihned z definice čísel $c_{n,k}$. Pokud jde o uvedenou rekurentní formuli, uvažujme libovolnou permutaci σ množiny $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$, v jejímž rozkladu na součin nezávislých cyklů se objevuje právě k cyklů. Počet takových permutací je dán číslem $c_{n+1,k}$. Uvažujme číslo $n+1$. Permutace σ může mít číslo $n+1$ jako pevný bod. V takovém případě zúžení permutace σ na množinu $\{1, 2, \dots, n\}$ bude permutací této množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, v jejímž rozkladu na součin nezávislých cyklů se objeví $k-1$ cyklů. Počet takových permutací je dán číslem $c_{n,k-1}$. Anebo číslo $n+1$ nebude pevným bodem permutace σ. Pak toto číslo $n+1$ bude figurovat v některém cyklu délky větší než 1. Uvažme permutaci σ' množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, která se bude lišit od permutace σ jenom tím, že zkrátíme cyklus permutace σ obsahující číslo $n+1$ vypuštěním tohoto čísla $n+1$; ostatní cykly zůstanou beze změny. Tak ale může vzniknout zcela libovolná permutace množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, v jejímž rozkladu na součin nezávislých cyklů se objeví právě k cyklů. Počet takových permutací je dán číslem $c_{n,k}$. Opačným postupem je možno ke každé permutaci τ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, v jejímž rozkladu na součin nezávislých cyklů se objevuje k cyklů, vytvořit celkem n permutací množiny $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$, v jejichž rozkladu na součin nezávislých cyklů se objevuje právě k cyklů a které nemají číslo $n+1$ jako pevný bod, vložením tohoto čísla $n+1$ do kteréhokoliv cyklu permutace τ na kterékoliv místo v tomto cyklu.

Je vidět, že takto jsme ověřili, že číslo $c_{n+1,k}$ je rovno hodnotě $c_{n,k-1} + nc_{n,k}$, což dokazuje uvedenou rekurentní formuli. □

Nyní jsme připraveni odvodit následující výsledek poskytující informaci o kombinatorickém významu Stirlingových čísel 1. druhu.

Důsledek.

Pro všechna nezáporná celá čísla n, k platí rovnost

$$|s_{n,k}| = c_{n,k}.$$

Důkaz.

Podle předchozích dvou tvrzení čísla $|s_{n,k}|$ a $c_{n,k}$ jsou dána týmiž počátečními hodnotami a vyhovují týmž rekurentním formulím, odkud plyne, že tato čísla si musí být rovna. □

Tvrzení.

Stirlingova čísla 1. druhu vyhovují rekurentní formuli

$$s_{n+1,k} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, [n]_j \, s_{n-j,k-1}$$

platné pro všechna nezáporná celá čísla n a všechna kladná celá čísla k.

Důkaz.

Už jsme viděli, že platí $[x]_{n+1} = [x]_n(x-n) = x[x]_n - n[x]_n$. Aplikujeme-li tuto formuli opakovaně, postupně získáme rozvoj

$$\begin{aligned}
[x]_{n+1} &= x[x]_n - n[x]_n = x[x]_n - nx[x]_{n-1} + n(n-1)[x]_{n-1} \\
&= x[x]_n - nx[x]_{n-1} + n(n-1)x[x]_{n-2} - n(n-1)(n-2)[x]_{n-2} \\
&\qquad\vdots \\
&= x[x]_n - nx[x]_{n-1} + n(n-1)x[x]_{n-2} - \cdots + (-1)^n [n]_n x[x]_0 \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, [n]_j \, x \, [x]_{n-j}.
\end{aligned}$$

Číslo $s_{n+1,k}$ je koeficient u mocniny x^k v polynomu $[x]_{n+1}$. Vzhledem k právě odvozené rovnosti to znamená, že číslo $s_{n+1,k}$ je součtem koeficientů u mocniny x^k v polynomech $(-1)^j [n]_j \, x \, [x]_{n-j}$ pro $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Koeficient u mocniny x^k v takovém polynomu $(-1)^j [n]_j \, x \, [x]_{n-j}$ je číslem $(-1)^j [n]_j$ vynásobený koeficient u mocniny x^{k-1} v polynomu $[x]_{n-j}$. Ale tento poslední koeficient je roven číslu $s_{n-j,k-1}$. Odtud pak plyne, že

$$s_{n+1,k} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j [n]_j \, s_{n-j,k-1},$$

což bylo potřeba dokázat. □

Odtud ještě podobným obratem jako výše odvodíme následující fakt.

Tvrzení.

Absolutní hodnoty Stirlingových čísel 1. druhu vyhovují rekurentní formuli

$$|s_{n+1,k}| = \sum_{j=0}^{n} [n]_j \, |s_{n-j,k-1}|$$

platné pro všechna nezáporná celá čísla n a všechna kladná celá čísla k.

Důkaz.

Viděli jsme už, že pro všechna nezáporná celá čísla n, k platí $|s_{n,k}| = (-1)^{n+k} s_{n,k}$. Odtud a z předchozího tvrzení pak plyne

$$\begin{aligned}
|s_{n+1,k}| = (-1)^{n+k+1} s_{n+1,k} &= (-1)^{n+k+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \,[n]_j\, s_{n-j,k-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+j+k+1} \,[n]_j\, s_{n-j,k-1} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j+k-1} \,[n]_j\, s_{n-j,k-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} [n]_j \,|s_{n-j,k-1}|.
\end{aligned}$$

To ovšem bylo potřeba ukázat. $\square$

Stirlingova čísla 2. druhu jsou definována následovně. Nechť n, k jsou libovolná nezáporná celá čísla a nechť M je konečná množina mající n prvků. Označme $S_{n,k}$ počet všech rozkladů množiny M na k neprázdných tříd. Tato čísla $S_{n,k}$ se nazývají Stirlingova čísla 2. druhu.

Tvrzení.

Stirlingova čísla 2. druhu jsou dána počátečními hodnotami

$$S_{0,0} = 1,\ S_{n,0} = 0 \text{ pro } n > 0,\ S_{0,k} = 0 \text{ pro } k > 0$$

a rekurentní formulí

$$S_{n+1,k} = S_{n,k-1} + kS_{n,k}$$

platnou pro všechna nezáporná celá čísla n a všechna kladná celá čísla k.

Důkaz.

Uvedené počáteční hodnoty plynou ihned z definice Stirlingových čísel 2. druhu. Pokud jde o uvedenou rekurentní formuli, vezměme konečnou množinu M mající n prvků a nějaký další prvek $b \notin M$. Představme si všechny rozklady množiny $M \cup \{b\}$ na k tříd. Počet těchto rozkladů je dán číslem $S_{n+1,k}$. V některých těchto rozkladech tvoří prvek b jednoprvkovou třídu. Ostatní třídy pak tvoří rozklad množiny M na $k-1$ tříd. Počet těchto rozkladů je dán číslem $S_{n,k-1}$.

V ostatních rozkladech množiny $M \cup \{b\}$ na k tříd je prvek b obsažen v některé víceprvkové třídě. Vyjmutím prvku b z této třídy vznikne rozklad množiny M na k tříd. Počet těchto rozkladů je dán číslem $S_{n,k}$. Naopak ke každému rozkladu množiny M na k tříd je možno opačným postupem vytvořit celkem k rozkladů množiny $M \cup \{b\}$ na k tříd, v nichž prvek b leží v některé víceprvkové třídě. Prostě přidáme prvek b ke kterékoliv třídě daného rozkladu množiny M na k tříd. Tato úvaha ukazuje, že číslo $S_{n+1,k}$ je rovno hodnotě $S_{n,k-1} + kS_{n,k}$. To ale dává dokazovanou rekurentní formuli. $\square$

Pro Stirlingova čísla 2. druhu máme následující explicitní formuli.

Tvrzení.

Pro libovolná nezáporná celá čísla n, k platí

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

(kde klademe $0^0 = \left|\emptyset^\emptyset\right| = |\{\emptyset\}| = 1$*).*

Důkaz.

Označme hodnotu udanou ve výše uvedené rovnosti napravo symbolem $T_{n,k}$. Chceme ukázat, že platí rovnosti $S_{n,k} = T_{n,k}$ pro všechna nezáporná celá čísla n, k. Toho docílíme, když ukážeme, že hodnoty $T_{n,k}$ vyhovují počátečním podmínkám a rekurentní formuli uvedeným v předchozím tvrzení. Fakt, že $T_{0,0} = 1$ a $T_{n,0} = 0$ pro $n > 0$, plyne ihned z definice hodnot $T_{n,k}$. Abychom ukázali, že $T_{0,k} = 0$ pro $k > 0$, stačí si všimnout, že podle binomické věty je

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} = (1-1)^k = 0.$$

Věnujme se tedy požadované rekurentní formuli. Z definice hodnot $T_{n,k}$ a s využitím vlastností binomických koeficientů dostáváme

$$\begin{aligned} T_{n,k-1} + kT_{n,k} &= \frac{1}{(k-1)!} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i-1} \binom{k-1}{i} i^n + k\frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} \left(\binom{k}{i} - \binom{k-1}{i} \right) i^n + \frac{1}{(k-1)!} \cdot k^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(k-1)!} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} \binom{k-1}{i-1} i^n + \frac{1}{(k-1)!} \cdot k^n \\
&= \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^{n+1} + \frac{1}{k!} \cdot k^{n+1} \\
&= \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^{n+1} = T_{n+1,k}.
\end{aligned}
$$

To je ale právě potřebná rekurentní formule pro čísla $T_{n,k}$. □

Tvrzení.

Stirlingova čísla 2. druhu vyhovují rekurentní formuli

$$
S_{n+1,k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S_{j,k-1}
$$

platné pro všechna nezáporná celá čísla n a všechna kladná celá čísla k.

Důkaz.

Mějme konečnou množinu M mající n prvků a vezměme další prvek $b \notin M$. Uvažujme všechny rozklady množiny $M \cup \{b\}$ na k tříd. Počet těchto rozkladů je dán číslem $S_{n+1,k}$. V takovém rozkladu leží prvek b v některé třídě C. Tato třída C má $i+1$ prvků a množina $C - \{b\}$ má i prvků pro nějaké $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Zbývající třídy uvažovaného rozkladu pak tvoří rozklad množiny $M - C$ na $k-1$ tříd. Množina $C - \{b\}$ je podmnožinou množiny M a lze ji vybrat $\binom{n}{i}$ způsoby. Je-li tato množina už vybrána, pak k ní lze vzít kterýkoliv z rozkladů množiny $M - C$ na $k-1$ tříd. Počet těchto rozkladů je dán číslem $S_{n-i,k-1}$. Dostáváme tak rovnost

$$S_{n+1,k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S_{n-i,k-1}.$$

Položíme-li nakonec $j = n - i$, přejde tato rovnost v rovnost

$$S_{n+1,k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S_{j,k-1},$$

kterou bylo potřeba dokázat. □

Stirlingova čísla 2. druhu postihují další souvislost mezi mocninami proměnné x a klesajícími faktoriály v proměnné x. Máme následující sdělení.

Tvrzení.

Pro všechna nezáporná celá čísla n platí

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}[x]_k.$$

Důkaz.

Uvedená rovnost je rovností dvou polynomů stupně n v proměnné x. Tyto polynomy se budou sobě rovnat, pokud jejich rozdíl bude polynomem majícím alespoň $n+1$ různých kořenů. To nastane, pokud se hodnoty těchto dvou polynomů budou sobě rovnat pro alespoň $n+1$ různých reálných čísel dosazených za proměnnou x. My ukážeme, že se hodnoty těchto dvou polynomů sobě rovnají dokonce pro všechna kladná celá čísla ℓ dosazená za proměnnou x.

Buď M konečná množina mající n prvků a buď L konečná množina mající ℓ prvků. Uvažujme libovolná zobrazení $f : M \to L$. Počet těchto zobrazení je roven číslu ℓ^n. Rozdělme nyní tato zobrazení f podle toho, jaké jsou jejich obrazy $f(M)$. Každé takové zobrazení $f : M \to L$ očividně určuje surjektivní zobrazení $f : M \to f(M)$. Obrazy $f(M)$ při těchto zobrazeních jsou nějakými podmnožinami množiny L.

Takto pro každou podmnožinu $H \subseteq L$ pořídíme množinu všech surjektivních zobrazení $f : M \to H$. Pro různé podmnožiny $H \subseteq L$ jsou tyto množiny surjektivních zobrazení navzájem disjunktní. Je-li k počet prvků podmnožiny H, pak počet všech surjektivních zobrazení $f : M \to H$ je roven číslu $k! \cdot S_{n,k}$. Skutečně každé takové surjektivní zobrazení f indukuje rozklad množiny M na k tříd; počet těchto rozkladů je dán číslem $S_{n,k}$. Naopak ke každému rozkladu množiny M na k tříd lze pořídit $k!$ surjektivních zobrazení $f : M \to H$, která tento rozklad indukují. Dostanou se libovolnými permutacemi prvků množiny H. Poněvadž pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ je počet všech podmnožin $H \subseteq L$ majících k prvků dán binomickým koeficientem $\binom{\ell}{k}$, dostáváme tak rovnost

$$\ell^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{\ell}{k} k! \cdot S_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{[\ell]_k}{k!} \cdot k! \cdot S_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} [\ell]_k .$$

To je ale potřebná rovnost hodnot polynomů x^n a $\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} [x]_k$ ve všech kladných celých číslech ℓ. $\square$

Závěrem odvodíme z našich dosavadních zjištění následující poznatek. Bude to první příklad jevu, kterému se říká vzájemně inverzní formule. V daném případě by bylo možno mluvit o Stirlingových vzájemně inverzních formulích.

Důsledek.

Nechť f, g jsou dvě reálné funkce definované na množině všech nezáporných celých čísel. Pak platí rovnosti

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} f(k) \quad \textit{pro všechna nezáporná celá čísla } n$$

právě tehdy, když platí rovnosti

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} g(k) \quad \textit{pro všechna nezáporná celá čísla } n.$$

Důkaz.

Uvažme nekonečné matice

$$A = \left(s_{n,k}\right)_{n,k=0,1,2,\ldots} \quad \text{a} \quad B = \left(S_{n,k}\right)_{n,k=0,1,2,\ldots}.$$

Tyto matice mají v každém řádku jen konečný počet nenulových hodnot. Je tedy možné tyto matice mezi sebou násobit a je také možné je zprava násobit nějakými nekonečnými vektory zapsanými do sloupců. Uvažme nekonečné vektory

$$\mathbf{v} = \left(x^n\right)_{n=0,1,2,\ldots} \quad \text{a} \quad \mathbf{w} = \left([x]_n\right)_{n=0,1,2,\ldots}.$$

Pak výše uvedené formule $[x]_n = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} x^k$ a $x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} [x]_k$ platné pro všechna nezáporná celá čísla n lze přepsat jako rovnosti nekonečných vektorů

$$\mathbf{w} = A \cdot \mathbf{v} \quad \text{a} \quad \mathbf{v} = B \cdot \mathbf{w}.$$

Je tedy matice A maticí přechodu od báze $\mathbf{w}$ k bázi $\mathbf{v}$ ve vektorovém prostoru všech polynomů proměnné x a podobně matice B je maticí přechodu od báze $\mathbf{v}$ k bázi $\mathbf{w}$ v tomto vektorovém prostoru. To ale znamená, že matice A a B jsou k sobě navzájem inverzní. Uvažme dále nekonečné vektory

$$\mathbf{f} = \big(f(n)\big)_{n=0,1,2,\dots} \quad \text{a} \quad \mathbf{g} = \big(g(n)\big)_{n=0,1,2,\dots}$$

vytvořené z hodnot našich reálných funkcí f a g. Pak výše uvedené tvrzení o našich vzájemně inverzních formulích, které máme dokázat, říká, že rovnost vektorů

$$\mathbf{g} = A \cdot \mathbf{f}$$

platí právě tehdy, když platí rovnost vektorů

$$\mathbf{f} = B \cdot \mathbf{g}.$$

Ale skutečně jedna z těchto rovností implikuje druhou, poněvadž matice A a B jsou k sobě navzájem inverzní, takže součiny $A \cdot B$ a $B \cdot A$ jsou nekonečnými jednotkovými maticemi. $\square$