# Incidenční algebry

Buď $P$ částečně uspořádaná množina. Intervalem v množině $P$ rozumíme libovolnou podmnožinu tvaru

$$[a, b] = \{x \in P : a \leqslant x \leqslant b\}$$

pro jakákoliv $a, b \in P$ splňující $a \leqslant b$. Řekneme, že částečně uspořádaná množina $P$ je lokálně konečná, jestliže všechny intervaly v množině $P$ jsou konečné podmnožiny. Hlavním ideálem v množině $P$ určeným prvkem $a \in P$ rozumíme podmnožinu

$$(a] = \{x \in P : x \leqslant a\}.$$

Hlavním filtrem v množině $P$ určeným prvkem $a \in P$ rozumíme podmnožinu

$$[a) = \{x \in P : a \leqslant x\}.$$

Silnějšími požadavky, které je možno klást na částečně uspořádanou množinu $P$, než je požadavek lokální konečnosti množiny $P$, jsou požadavky, aby všechny hlavní ideály v množině $P$ byly konečné podmnožiny, případně aby všechny hlavní filtry v množině $P$ byly konečné podmnožiny.

Buď $P$ lokálně konečná částečně uspořádaná množina. Označme symbolem $\mathrm{Int}(P)$ množinu všech intervalů v množině $P$. Buď dále $K$ libovolné těleso charakteristiky 0. Uvažme množinu funkcí

$$\mathbb{I}_K(P) = \{f : \mathrm{Int}(P) \to K\}.$$

Pak množina $\mathbb{I}_K(P)$ spolu s obvyklými operacemi sčítání funkcí a násobení funkcí prvky z $K$ tvoří vektorový prostor nad tělěsem $K$. Pro libovolné prvky $a, b \in P$ splňující $a \leqslant b$ a pro libovolnou funkci $f : \mathrm{Int}(P) \to K$ píšeme místo $f([a, b])$ krátce jen $f(a, b)$. Součinem anebo též konvolucí dvou funkcí $f, g : \mathrm{Int}(P) \to K$ rozumíme funkci $f * g : \mathrm{Int}(P) \to K$ definovanou pro libovolná $a, b \in P$ splňující $a \leqslant b$ předpisem

$$(f * g)(a, b) = \sum_{a \leqslant x \leqslant b} f(a, x)g(x, b).$$

Výše uvedená suma je konečná, a tedy konvoluce funkcí je korektně definovaná, poněvadž částečně uspořádaná množina $P$ je lokálně konečná. Snadno se vidí, že konvoluce funkcí je asociativní binární operací na množině $\mathbb{I}_K(P)$ a že množina $\mathbb{I}_K(P)$ spolu s operacemi sčítání funkcí a konvoluce funkcí tvoří okruh s jednotkovým prvkem. Tento jednotkový prvek, který bývá označován symbolem $\delta$ a bývá nazýván Kroneckerovo delta, je pro libovolná $a, b \in P$ splňující $a \leqslant b$ definován předpisem

$$\delta(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } a = b, \\ 0, & \text{jestliže } a \neq b. \end{cases}$$

Brzy nás budou zajímat jednotky takto vzniklého okruhu $\mathbb{I}_K(P)$. Nejprve ale dokončeme dosavadní úvahy konstatováním, že dohromady množina $\mathbb{I}_K(P)$ spolu se všemi doposud uvažovanými operacemi tvoří asociativní algebru nad tělesem $K$, která bývá nazývána incidenční algebrou částečně uspořádané množiny $P$.

Vraťme se nyní k jednotkám incidenční algebry $\mathbb{I}_K(P)$, to jest k funkcím $f : \mathrm{Int}(P) \to K$ majícím v $\mathbb{I}_K(P)$ inverzní prvek vzhledem k operaci konvoluce funkcí. Platí následující tvrzení:

## Tvrzení.

*Funkce $f : \mathrm{Int}(P) \to K$ je jednotkou incidenční algebry $\mathbb{I}_K(P)$ právě tehdy, když platí $f(a,a) \neq 0$ pro všechna $a \in P$.*

## Důkaz.

Je-li $g : \mathrm{Int}(P) \to K$ inverzním prvkem k funkci $f : \mathrm{Int}(P) \to K$, to jest platí-li $f * g = \delta$, pak zejména pro každé $a \in P$ platí rovnost $(f * g)(a,a) = \delta(a,a)$, neboli $f(a,a)g(a,a) = 1$, takže nutně $f(a,a) \neq 0$.

Naopak, je-li splněno $f(a,a) \neq 0$ pro všechna $a \in P$, pak uvažujme následujícím způsobem. Má-li nějaká funkce $g : \mathrm{Int}(P) \to K$ být pravým inverzním prvkem k funkci $f : \mathrm{Int}(P) \to K$, to jest má-li platit $f * g = \delta$, znamená to, že pro každé $a \in P$ musí platit $(f * g)(a,a) = \delta(a,a)$, neboli $f(a,a)g(a,a) = 1$, a pro každá $a, b \in P$ splňující $a < b$ musí platit $(f * g)(a,b) = \delta(a,b)$, neboli $\sum_{a \leqslant x \leqslant b} f(a,x)g(x,b) = 0$. Takže nutně pro každé $a \in P$ je $g(a,a) = f(a,a)^{-1}$. Dále pro každá $a, b \in P$ splňující $a < b$ lze poslední sumu a jí příslušnou rovnost rozepsat ve tvaru

$$f(a,a)g(a,b) + \sum_{a < x \leqslant b} f(a,x)g(x,b) = 0,$$

odkud nutně plyne

$$g(a,b) = -f(a,a)^{-1} \cdot \sum_{a < x \leqslant b} f(a,x)g(x,b),$$

kde uvedená suma je neprázdná, poněvadž $a < b$. Známe-li tedy už hodnoty $g(x,b)$ pro všechna $a < x \leqslant b$, vyplyne odtud jednoznačně, jaká musí být hodnota $g(a,b)$. Takto lze tedy počítat hodnoty $g(a,b)$ indukcí vzhledem k velikosti intervalu $[a,b]$. Je jasné, že pak takto vypočtená funkce $g : \mathrm{Int}(P) \to K$ bude pravým inverzním prvkem k funkci $f : \mathrm{Int}(P) \to K$.

Obdobným způsobem se vypočte funkce $h : \mathrm{Int}(P) \to K$, která bude levým inverzním prvkem k funkci $f : \mathrm{Int}(P) \to K$, to jest bude takovou funkcí, že bude platit $h * f = \delta$. Pak ale vyjde $h = h * \delta = h * f * g = \delta * g = g$, takže $g = h$ bude oboustranným inverzním prvkem k funkci $f : \mathrm{Int}(P) \to K$. $\square$

Významnou funkcí v incidenční algebře $\mathbb{I}_K(P)$ je tak zvaná zeta funkce $\zeta_P$ definovaná pro každá $a, b \in P$ splňující $a \leqslant b$ jednoduchým předpisem

$$\zeta_P(a, b) = 1.$$

Tato zeta funkce samozřejmě splňuje podmínku z předchozího tvrzení, takže podle tohoto tvrzení existuje v incidenční algebře $\mathbb{I}_K(P)$ k zeta funkci $\zeta_P$ prvek inverzní. Tento inverzní prvek se obvykle značí symbolem $\mu_P$ a nazývá se Möbiovou funkcí částečně uspořádané množiny $P$.

Zeta funkce $\zeta_P$ a k ní inverzní prvek, jímž je Möbiova funkce $\mu_P$, tedy vyhovují podmínce $\zeta_P * \mu_P = \delta$, čili pro každá $a, b \in P$ splňující $a \leqslant b$ vyhovují podmínce

$$(\zeta_P * \mu_P)(a, b) = \delta(a, b).$$

Podrobněji rozepsáno to znamená, že pro každá $a, b \in P$ splňující $a \leqslant b$ platí

$$\sum_{a \leqslant x \leqslant b} \zeta_P(a, x)\mu_P(x, b) = \delta(a, b).$$

Vzhledem k definici zeta funkce $\zeta_P$ to ale znamená, že pro každá $a, b \in P$ splňující $a \leqslant b$ platí

$$\sum_{a \leqslant x \leqslant b} \mu_P(x, b) = \delta(a, b).$$

Odtud použitím podobných obratů jako v důkazu předchozího tvrzení odvodíme, že pro inverzní prvek k zeta funkci $\zeta_P$ v incidenční algebře $\mathbb{I}_K(P)$, to jest pro Möbiovu funkci $\mu_P$ platí formule

$$\mu_P(a, a) = 1 \quad \text{pro všechna } a \in P,$$

$$\mu_P(a, b) = -\sum_{a < x \leqslant b} \mu_P(x, b) \quad \text{pro všechna } a, b \in P \text{ splňující } a < b.$$

Tyto formule lze vzít jako alternativní definici Möbiovy funkce $\mu_P$ částečně uspořádané množiny $P$, která neodkazuje na pojem incidenční algebry $\mathbb{I}_K(P)$. Tímto způsobem je Möbiova funkce $\mu_P$ na množině $\mathrm{Int}(P)$ definována indukcí vzhledem k velikosti intervalu $[a, b]$.