Möbiova funkce částečně uspořádané množiny všech rozkladů konečné množiny

Buď S neprázdná konečná množina. Označme symbolem $\mathfrak{P}(S)$ množinu všech rozkladů množiny S. Na této množině $\mathfrak{P}(S)$ uvažme částečné uspořádání $\leqslant$ dané následovně. Pro libovolné dva rozklady σ a τ množiny S klademe $\sigma \leqslant \tau$ právě tehdy, když roklad σ je zjemněním rozkladu τ. Takto dostáváme konečnou částečně uspořádanou množinu $\mathfrak{P}(S)$. Naším příštím úkolem bude najít Möbiovu funkci $\mu_{\mathfrak{P}(S)}$ této částečně uspořádané množiny $\mathfrak{P}(S)$.

Připomeňme, že rozklad $\sigma = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ množiny S je zjemněním rozkladu $\tau = \{B_1, B_2, \dots, B_\ell\}$ množiny S, jestliže pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ existuje $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ takové, že $A_i \subseteq B_j$. To znamená, že každá z tříd $B_1, B_2, \dots, B_\ell$ rozkladu τ je disjunktním sjednocením několika tříd vzatých mezi třídami $A_1, A_2, \dots, A_k$ rozkladu σ. V této situaci vzniká rozklad τ/σ indukovaný na množině $\sigma = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ rozkladem τ následovně. Dvě množiny A_{i_1}, A_{i_2}, kde $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, k\}$, leží v téže třídě rozkladu τ/σ právě tehdy, když existuje $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ takové, že $A_{i_1} \subseteq B_j$ a $A_{i_2} \subseteq B_j$.

Věnujme se v takové situaci intervalu $[\sigma, \tau]$ v částečně uspořádané množině $\mathfrak{P}(S)$. Vezměme tedy libovolný rozklad $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_\wp\}$ množiny S takový, že $\sigma \leqslant \pi \leqslant \tau$. Uvažme rozklad π/σ indukovaný na množině $\sigma = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ rozkladem π. Je vidět, že pak předpisem $\pi \mapsto \pi/\sigma$ je dán izomorfismus intervalu $[\sigma, \tau]$ v částečně uspořádané množině $\mathfrak{P}(S)$ na interval $[\sigma/\sigma, \tau/\sigma]$ v částečně uspořádané množině $\mathfrak{P}(\sigma)$ všech rozkladů množiny $\sigma = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$. Ovšem σ/σ je triviální rozklad množiny σ na jednoprvkové podmnožiny.

Poněvadž jmenované dva intervaly byly izomorfní, a poněvadž hodnota Möbiovy funkce na daném intervalu závisí pouze na tomto intervalu samotném, nikoliv na celé částečně uspořádané množině, v níž se tento interval bere, musí být jmenovitě hodnota Möbiovy funkce $\mu_{\mathfrak{P}(S)}$ na intervalu $[\sigma, \tau]$ rovna hodnotě Möbiovy funkce $\mu_{\mathfrak{P}(\sigma)}$ na intervalu $[\sigma/\sigma, \tau/\sigma]$, kde σ/σ je triviální rozklad na jednoprvkové třídy. Z této úvahy tedy plyne, že k tomu, abychom uměli počítat hodnoty Möbiovy funkce $\mu_{\mathfrak{P}(S)}$ na libovolných intervalech $[\sigma, \tau]$ v částečně uspořádaných množinách $\mathfrak{P}(S)$ pro libovolné konečné množiny S, stačí umět počítat tyto hodnoty Möbiovy funkce jen na intervalech tvaru $[\mathcal{O}, \tau]$, kde $\mathcal{O}$ je triviální rozklad množiny S na jednoprvkové třídy, opět pro libovolné konečné množiny S.

Věnujme se tedy nyní úkolu určit hodnoty Möbiovy funkce $\mu_{\mathfrak{P}(S)}$ na libovolných intervalech tvaru $[\mathcal{O}, \tau]$ v částečně uspořádaných množinách $\mathfrak{P}(S)$ všech rozkladů konečných množin S. Nechť opět $\tau = \{B_1, B_2, \ldots, B_\ell\}$.

Uvažme dále libovolný rozklad $\pi = \{C_1, C_2, \dots, C_\wp\}$ množiny S takový, že je splněno $\pi \leqslant \tau$. Pak každá z tříd $B_1, B_2, \dots, B_\ell$ rozkladu τ je disjunktním sjednocením několika tříd vzatých mezi třídami $C_1, C_2, \dots, C_\wp$ rozkladu π. To ukazuje, že rozklad π indukuje rozklady jednotlivých tříd $B_1, B_2, \dots, B_\ell$ rozkladu τ. Označme $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\ell$ tyto indukované rozklady. To znamená, že pro každé $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ je π_j rozklad množiny B_j, jehož třídami jsou právě ty množiny mezi $C_1, C_2, \dots, C_\wp$, jejichž disjunktním sjednocením je množina B_j. Nyní je patrno, že předpisem $\pi \mapsto (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\ell)$ je dán izomorfismus intervalu $[\mathcal{O}, \tau]$ v částečně uspořádané množině $\mathfrak{P}(S)$ na součin částečně uspořádaných množin $\mathfrak{P}(B_1) \times \mathfrak{P}(B_2) \times \cdots \times \mathfrak{P}(B_\ell)$ všech rozkladů množin $B_1, B_2, \dots, B_\ell$.

Poněvadž jde o izomorfní částečně uspořádané množiny, je druhá z těchto uspořádaných množin rovněž intervalem a hodnota Möbiovy funkce $\mu_{\mathfrak{P}(S)}$ na intervalu $[\mathcal{O}, \tau]$ musí být rovna hodnotě odpovídající Möbiovy funkce na celé částečně uspořádané množině $\mathfrak{P}(B_1) \times \mathfrak{P}(B_2) \times \cdots \times \mathfrak{P}(B_\ell)$. Z dřívějška víme, že hodnota této poslední Möbiovy funkce je rovna součinu hodnot jednotlivých Möbiových funkcí $\mu_{\mathfrak{P}(B_1)}, \mu_{\mathfrak{P}(B_2)}, \dots, \mu_{\mathfrak{P}(B_\ell)}$ na celých částečně uspořádaných množinách $\mathfrak{P}(B_1), \mathfrak{P}(B_2), \dots, \mathfrak{P}(B_\ell)$. Tato úvaha ukazuje, že k tomu, abychom uměli počítat hodnoty Möbiovy funkce $\mu_{\mathfrak{P}(S)}$ na libovolných intervalech v částečně uspořádané množině $\mathfrak{P}(S)$ pro libovolné konečné množiny S, stačí umět počítat jenom hodnotu Möbiovy funkce $\mu_{\mathfrak{P}(S)}$ na celé částečně uspořádané množině $\mathfrak{P}(S)$, která je ovšem sama intervalem, avšak opět je třeba to umět pro libovolné konečné množiny S.

Převedli jsme tak naši výchozí úlohu na následující úlohu. Buď S libovolná neprázdná konečná množina. Pak částečně uspořádaná množina $\mathfrak{P}(S)$ všech rozkladů množiny S je sama o sobě intervalem. Nejmenším rozkladem je triviální rozklad $\mathcal{O}$ množiny S na jednoprvkové třídy a největším rozkladem je rozklad $\Im$, jehož jedinou třídou je celá množina S. Má se určit hodnota Möbiovy funkce $\mu_{\mathfrak{P}(S)}$ této částečně uspořádané množiny $\mathfrak{P}(S)$ na intervalu $[\mathcal{O}, \Im]$, to jest na největším intervalu, jímž je ale částečně uspořádaná množina $\mathfrak{P}(S)$ sama.

K tomu účelu aplikujeme duální variantu obecné věty o Möbiových vzájemně inverzních formulích.

Buď T jiná dostatečně velká neprázdná konečná množina. Uvažme libovolná zobrazení $h : S \to T$. Pro každý rozklad π množiny S označme symbolem $f(\pi)$ počet všech těch zobrazení $h : S \to T$, která na množině S indukují rozklad π. Poněvadž množina T je dostatečně velká, je $f(\pi) \neq 0$ pro každý rozklad π množiny S. Formulujme to poněkud přesněji takto. Rozepišme pro určitost rozklad π ve tvaru $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_\wp\}$. Pak zobrazení $h : S \to T$, která na množině S indukují rozklad π, jsou těmi zobrazeními, která jsou konstantní na všech třídách $C_1, C_2, \ldots, C_\wp$ rozkladu π a prvkům z různých těchto tříd přiřazují různé prvky množiny T. Tato zobrazení $h : S \to T$ evidentně korespondují s injektivními zobrazeními $\theta : \pi \to T$. Počet těchto zobrazení je ovšem roven číslu $\big[|T|\big]_\wp$.

Podotkněme ještě, že $\wp = |\pi|$. Celkem to znamená, že platí $f(\pi) = \big[|T|\big]_{|\pi|}$ pro každý rozklad π množiny S. Nalezené hodnoty $f(\pi)$ pak dohromady skládají celé zobrazení $f : \mathfrak{P}(S) \to \mathbb{N}$. Uvažme nyní pro každý rozklad π množiny S sumu $\sum_{\tau \geqslant \pi} f(\tau)$. Tato suma udává pro daný rozklad π počet všech těch zobrazení $h : S \to T$, která na množině S indukují takový rozklad τ, že rozklad π je zjemněním rozkladu τ. Je jasné, že taková zobrazení $h : S \to T$ jsou právě těmi zobrazeními, která jsou konstantní na všech třídách $C_1, C_2, \ldots, C_\wp$ rozkladu π, a nic dalšího se nepožaduje. Taková zobrazení ale korespondují s libovolnými zobrazeními $\vartheta : \pi \to T$. Počet posledně jmenovaných zobrazení je však roven číslu $|T|^\wp$. Podotkněme znovu, že $\wp = |\pi|$. Uvažme v této souvislosti ještě zobrazení $g : \mathfrak{P}(S) \to \mathbb{N}$ dané pro každý rozklad π množiny S předpisem $g(\pi) = |T|^{|\pi|}$. Z dosavadních úvah tak dostáváme rovnost

$$g(\pi) = \sum_{\tau \geqslant \pi} f(\tau),$$

která platí pro každý rozklad π množiny S. Tento soubor rovností ale má tvar prvních rovností v duální variantě věty o Möbiových inverzních formulích. Podle této věty pak platí také rovnosti

$$f(\pi) = \sum_{\tau \geqslant \pi} \mu_{\mathfrak{P}(S)}(\pi, \tau)\, g(\tau),$$

opět pro každý rozklad π množiny S. Zde $\mu_{\mathfrak{P}(S)}$ je Möbiova funkce částečně uspořádané množiny $\mathfrak{P}(S)$.

Přepsáno nazpět prostřednictvím zadání funkcí f a g toto zjištění dává, že rovnosti

$$\big[|T|\big]_{|\pi|} = \sum_{\tau \geqslant \pi} \mu_{\mathfrak{P}(S)}(\pi,\tau)\,|T|^{|\tau|}$$

platí pro každý rozklad π množiny S. V těchto rovnostech vystupují hodnoty $\big[|T|\big]_{|\pi|}$ a $|T|^{|\tau|}$, které lze vnímat jako hodnoty polynomů $[x]_{|\pi|}$ a $x^{|\tau|}$ v proměnné x vzaté v číslech $|T|$ pro všechny dostatečně velké konečné množiny T. Posledně jmenované rovnosti tak jsou rovnostmi hodnot dvou polynomů v proměnné x po dosazení všech dostatečně velkých kladných celočíselných hodnot $|T|$ za proměnnou x. To ale znamená, že i dotyčné polynomy v proměnné x se sobě musí rovnat. Takto dospíváme k rovnostem polynomů

$$[x]_{|\pi|} = \sum_{\tau \geqslant \pi} \mu_{\mathfrak{P}(S)}(\pi,\tau)x^{|\tau|}$$

v proměnné x platným pro každý rozklad π množiny S. Zejména pro triviální rozklad $\mathcal{O}$ množiny S vzatý jako rozklad π odtud dostáváme rovnost polynomů

$$[x]_{|S|} = \sum_{\tau \in \mathfrak{P}(S)} \mu_{\mathfrak{P}(S)}(\mathcal{O},\tau)x^{|\tau|},$$

poněvadž $|\mathcal{O}| = |S|$. Tyto dva polynomy se sobě budou rovnat, budou-li si rovny koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné x.

Jmenovitě pro první mocninu x této proměnné máme vlevo koeficient

$$(-1)(-2)\cdots(-|S|+1) = (-1)^{|S|-1}(|S|-1)!$$

a vpravo máme koeficient

$$\mu_{\mathfrak{P}(S)}(\mathcal{O}, \mathfrak{I}),$$

poněvadž jedině pro rozklad $\mathfrak{I}$ pozůstávající pouze ze samotné množiny S, když ho vezmeme jako rozklad τ, máme $x^{|\mathfrak{I}|} = x$. Dostáváme tak rovnost

$$\mu_{\mathfrak{P}(S)}(\mathcal{O}, \mathfrak{I}) = (-1)^{|S|-1}(|S|-1)!,$$

což je ten výsledek, ke kterému jsme potřebovali dospět.