Princip inkluze a exkluze

Nejprve z doposud získaných poznatků o Möbiových inverzních formulích pro obecné lokálně konečné částečně uspořádané množiny odvodíme následující speciální větu pro množinu 2^S všech podmnožin nějaké neprázdné konečné množiny S částečně uspořádanou množinovou inkluzí.

Věta.

Buď S neprázdná konečná množina. Buď K těleso charakteristiky 0. Pak pro libovolné dvě funkce $f, g : 2^S \to K$ platí rovnosti

$$g(T) = \sum_{T \subseteq Y \subseteq S} f(Y) \quad \textit{pro všechny podmnožiny } T \subseteq S$$

právě tehdy, když platí rovnosti

$$f(T) = \sum_{T \subseteq Y \subseteq S} (-1)^{|Y-T|} g(Y) \quad \textit{pro všechny podmnožiny } T \subseteq S.$$

Důkaz.

Tato věta plyne z duální verze věty o Möbiových inverzních formulích aplikované na částečně uspořádanou množinu 2^S a z dříve odvozeného faktu, že hodnota Möbiovy funkce μ_{2^S} částečně uspořádané množiny 2^S na libovolných podmnožinách $T, Y \subseteq S$ splňujících $T \subseteq Y$ je rovna $\mu_{2^S}(T, Y) = (-1)^{|Y-T|}$. □

Obecný tvar principu inkluze a exkluze

Dokážeme následující větu, kterou lze považovat za obecnou variantu poznatku nesoucího název princip inkluze a exkluze.

Věta.

Buď Q konečná množina. Nechť $\{A_i : i \in I\}$ je neprázdný konečný systém podmnožin množiny Q, což znamená, že I je neprázdná konečná množina a $A_i \subseteq Q$ pro všechna $i \in I$. Položme $\overline{A}_i = Q - A_i$ pro všechna $i \in I$. Pak pro libovolnou podmnožinu $J \subseteq I$ platí

$$\left|\bigcap_{i\in J} A_i \cap \bigcap_{i\in I-J} \overline{A}_i\right| = \sum_{J\subseteq K\subseteq I} (-1)^{|K-J|} \left|\bigcap_{i\in K} A_i\right|.$$

Poznámka.

Dodejme pro určitost, že $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i = Q$.

Důkaz.

Je evidentní, že pro libovolnou podmnožinu $J \subseteq I$ platí

$$\bigcap_{i\in J} A_i = \bigcup_{J\subseteq K\subseteq I} \left(\bigcap_{i\in K} A_i \cap \bigcap_{i\in I-K} \overline{A}_i \right),$$

přičemž průnik vlevo je disjunktním sjednocením průniků vpravo. Odtud plyne rovnost

$$\left| \bigcap_{i\in J} A_i \right| = \sum_{J\subseteq K\subseteq I} \left| \bigcap_{i\in K} A_i \cap \bigcap_{i\in I-K} \overline{A}_i \right|.$$

Definujme nyní funkce f, g na množině 2^I předpisy

$$f(J) = \left| \bigcap_{i\in J} A_i \cap \bigcap_{i\in I-J} \overline{A}_i \right|, \;\; g(J) = \left| \bigcap_{i\in J} A_i \right| \;\; \text{pro všechny podmnožiny } J \subseteq I.$$

Pak předchozí vztah lze přepsat jako formuli

$$g(J) = \sum_{J \subseteq K \subseteq I} f(K) \quad \text{pro všechny podmnožiny } J \subseteq I.$$

Podle předchozí věty potom ovšem platí také inverzní formule

$$f(J) = \sum_{J \subseteq K \subseteq I} (-1)^{|K-J|} g(K) \quad \text{pro všechny podmnožiny } J \subseteq I.$$

Tato poslední formule pak po dosazení nazpět dává rovnost

$$\left| \bigcap_{i \in J} A_i \cap \bigcap_{i \in I-J} \overline{A}_i \right| = \sum_{J \subseteq K \subseteq I} (-1)^{|K-J|} \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right|,$$

která platí pro libovolnou podmnožinu $J \subseteq I$. $\square$

Vůbec nejčastější interpretace situace popsané v předchozí větě je tato: Je dána konečná množina Q objektů, které mohou mít konečně mnoho vlastností v_i, kde $i \in I$. Označme pro každé $i \in I$ symbolem A_i množinu všech těch objektů z Q, které mají vlastnost v_i. Pak pro danou podmnožinu $J \subseteq I$ je $\bigcap_{i \in J} A_i \cap \bigcap_{i \in I-J} \overline{A}_i$ množinou všech těch objektů z Q, které mají právě vlastnosti v_i pro $i \in J$.

Vztah v předchozí větě potom vyjadřuje počet těchto objektů prostřednictvím počtů objektů v podmnožinách $\bigcap_{i\in K} A_i$, kde $J \subseteq K \subseteq I$, což jsou množiny objektů majících alespoň vlastnosti v_i pro $i \in K$. Počty takovýchto objektů obvykle bývají snáze zjistitelné.

Nejčastěji uváděnou variantou principu inkluze a exkluze bývá vztah pro počet těch objektů z Q, které nemají žádnou z vlastností v_i pro $i \in I$.

Důsledek.

Buď Q konečná množina. Nechť $\{A_i : i \in I\}$ je neprázdný konečný systém podmnožin množiny Q. Označme symbolem $A(0)$ množinu objektů $\bigcap_{i\in I}(Q - A_i) = Q - \bigcup_{i\in I} A_i$. Pak platí

$$|A(0)| = \sum_{K\subseteq I} (-1)^{|K|} \left| \bigcap_{i\in K} A_i \right|, \quad \text{kde } \bigcap_{i\in\emptyset} A_i = Q.$$

Důkaz.

Tato rovnost plyne okamžitě z předchozí věty pro $J = \emptyset$. □

Zůstaňmme ještě chvíli u posledního důsledku. Rozepišme podrobněji formuli uvedenou v tomto důsledku. Vezměme nejprve za K prázdnou množinu, potom vezměme za K všechny jednoprvkové podmnožiny množiny I, pak vezměme za K všechny dvouprvkové podmnožiny množiny I, a tak pokračujme dále, až nakonec vezmeme za K celou množinu I. Takto formule v posledním důsledku nabude tvaru

$$|A(0)| = |Q| - \sum_{i \in I} |A_i| + \sum_{\substack{\{i,j\} \subseteq I \\ i \neq j}} |A_i \cap A_j| - \sum_{\substack{\{i,j,k\} \subseteq I \\ i \neq j \neq k \neq i}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| .$$

Střídání znamének v této formuli vysvětluje použití termínu princip inkluze a exkluze.

Obecnějším vztahem, než je vztah uvedený v předchozím důsledku, je vztah udávající počet těch objektů z Q, které mají právě r vlastností mezi vlastnostmi v_i, kde $i \in I$, pro nějaké r splňující $0 \leqslant r \leqslant |I|$.

Důsledek.

Buď Q konečná množina. Nechť $\{A_i : i \in I\}$ je neprázadný konečný systém podmnožin množiny Q. Položme $\overline{A}_i = Q - A_i$ pro všechna $i \in I$. Pro libovolné celé číslo r splňující $0 \leqslant r \leqslant |I|$ označme symbolem $A(r)$ množinu objektů $\bigcup_{\substack{J \subseteq I \\ |J|=r}} \left(\bigcap_{i \in J} A_i \cap \bigcap_{i \in I-J} \overline{A}_i \right)$. Pak platí

$$|A(r)| = \sum_{\substack{K \subseteq I \\ r \leqslant |K|}} (-1)^{|K|-r} \binom{|K|}{r} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| .$$

Důkaz.

S použitím obecného tvaru principu inkluze a exkluze uvedeného ve druhé z předchozích dvou vět postupně vychází

$$|A(r)| = \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J|=r}} \left| \bigcap_{i \in J} A_i \cap \bigcap_{i \in I-J} \overline{A}_i \right| = \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J|=r}} \sum_{J \subseteq K \subseteq I} (-1)^{|K-J|} \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right|$$

$$= \sum_{\substack{K \subseteq I \\ r \leqslant |K|}} \sum_{\substack{J \subseteq K \\ |J|=r}} (-1)^{|K-J|} \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| = \sum_{\substack{K \subseteq I \\ r \leqslant |K|}} \binom{|K|}{r} \cdot (-1)^{|K|-r} \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| .$$

Poslední rovnost plyne z kombinatorického významu binomických koeficientů, v tomto případě určujícího počet r-prvkových podmnožin množiny K. $\square$