Permutace s lichým počtem pevných bodů

Řekneme, že číslo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je pevným bodem permutace σ množiny čísel $\{1, 2, \dots, n\}$, jestliže $\sigma(i) = i$. Bude nás zajímat, kolik existuje permutací n-prvkové množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ majících lichý počet pevných bodů.

Pro každé nezáporné celé číslo n označme symbolem c_n hledaný počet permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ majících lichý počet pevných bodů a označme dále symbolem d_n počet permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ majících sudý počet pevných bodů. Pak ovšem platí $c_n + d_n = n!$.

Najdeme nejprve rekurentní formuli pro čísla c_n. Zřejmě $c_0 = 0$ a $c_1 = 1$. Pro $n \geqslant 2$ uvažujme následujícím způsobem. Mějme libovolnou permutaci σ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ mající lichý počet pevných bodů. Počet takových permutací je dán číslem c_n. Rozlišíme dále tři možnosti. Může se stát, že číslo n bude pevným bodem permutace σ. Pak permutace σ permutuje mezi sebou čísla $1, 2, \dots, n-1$. Tak vzniká permutace množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$ mající sudý počet pevných bodů. Počet takových permutací je dán číslem d_{n-1}. Dále se může stát, že permutace σ bude mezi sebou prohazovat číslo n a některé jiné číslo i. Pak $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ a permutace σ dále permutuje mezi sebou čísla $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n-1$. Tak vzniká permutace množiny $\{1, 2, \dots, n-1\} - \{i\}$ mající lichý počet pevných bodů. Počet takových permutací je dán číslem c_{n-2}.

A konečně se může stát, že budou existovat vzájemně různá čísla i, j taková, že $\sigma(i) = n$ a $\sigma(n) = j$. Pak $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Změňme permutaci σ tak, že vypustíme číslo n a budeme žádat, aby se číslo i zobrazilo na číslo j. Tak vzniká permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ mající lichý počet pevných bodů taková, že číslo i není jejím pevným bodem. Připomeňme, že i je číslo, které se původní permutací σ zobrazovalo na číslo n. Jinak je i libovolné číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Pro dané číslo i pak veďme následující úvahu. Počet všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ majících lichý počet pevných bodů je dán číslem c_{n-1}. Musíme ale tento počet umenšit o počet permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ majících lichý počet pevných bodů, v nichž je číslo i pevným bodem. Taková permutace pak permutuje mezi sebou čísla $1, 2, \ldots, i-1$, $i+1, \ldots, n-1$ a toto zúžení dotyčné permutace má sudý počet pevných bodů. Počet takových permutací je ovšem dán číslem d_{n-2}. Shrneme-li všechny doposud provedené úvahy, dospějeme k závěru, že pro každé $n \geqslant 2$ platí rovnost

$$c_n = d_{n-1} + (n-1)c_{n-2} + (n-1)(c_{n-1} - d_{n-2}).$$

Připomeňme, že pro každé n platí $c_n + d_n = n!$, takže $d_n = n! - c_n$. Využitím tohoto faktu v předchozí rovnosti dojdeme k rovnosti

$$c_n = (n-1)! - c_{n-1} + (n-1)c_{n-2} + (n-1)\big(c_{n-1} - (n-2)! + c_{n-2}\big).$$

Konečně jednoduchou úpravou dospějeme k zjištění, že platí rovnost

$$c_n = (n-2)c_{n-1} + 2(n-1)c_{n-2}$$

pro všechna $n \geqslant 2$. To je hledaný rekurentní vztah pro čísla c_n.

Míříme nyní k využití exponenciální generující funkce pro posloupnost čísel $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$. To jest uvažujeme mocninnou řadu

$$\mathfrak{C}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n.$$

K ní vezmeme ještě její derivaci

$$\mathfrak{C}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} x^{n-1}.$$

Z výše uvedené rekurentní formule pak plyne

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} x^{n-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-2)c_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + 2\cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)c_{n-2}}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{(n-2)!} x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + 2\cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_{n-2}}{(n-2)!} x^{n-1} \\
&= x\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n + 2x\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n.
\end{aligned}$$

S využitím počátečních hodnot $c_0 = 0$ a $c_1 = 1$ odtud vyplývá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} x^{n-1} - 1 = x\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n + 2x\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n,$$

neboli

$$\mathfrak{C}'(x) - 1 = x\cdot\mathfrak{C}'(x) - \mathfrak{C}(x) + 2x\cdot\mathfrak{C}(x),$$

anebo jinak

$$(1-x)\cdot\mathfrak{C}'(x) = (2x-1)\cdot\mathfrak{C}(x) + 1,$$

takže

$$\mathfrak{C}'(x) = \frac{2x-1}{1-x}\cdot\mathfrak{C}(x) + \frac{1}{1-x}.$$

To je ale lineární diferenciální rovnice 1. řádu pro neznámou funkci $\mathfrak{C}(x)$, přičemž $\mathfrak{C}(0) = 0$.

Připomeňme z kurzu matematické analýzy, že obecným řešením lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x)$$

je množina funkcí

$$y(x) = e^{\int f(x)dx}\left[C + \int g(x)e^{-\int f(x)dx}dx\right]$$

pro všechny reálné konstanty C.

Obecným řešením výše uvedené diferenciální rovnice pro $\mathfrak{C}(x)$ je tedy množina funkcí

$$e^{\int \frac{2x-1}{1-x}\,dx}\left[C+\int \frac{1}{1-x}e^{-\int \frac{2x-1}{1-x}\,dx}\,dx\right]$$

pro všechny reálné konstanty C. Přitom

$$\frac{2x-1}{1-x}=-2+\frac{1}{1-x},$$

takže

$$\int \frac{2x-1}{1-x}\,dx=-2\int dx+\int \frac{1}{1-x}\,dx=-2x-\ln(1-x),$$

odkud plyne

$$e^{\int \frac{2x-1}{1-x}\,dx}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{e^{2x}}.$$

Takže obecným řešením shora uvedené diferenciální rovnice pro $\mathfrak{C}(x)$ je množina funkcí

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{e^{2x}}\left[C+\int \frac{1}{1-x}\cdot(1-x)e^{2x}\,dx\right]&=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{e^{2x}}\left[C+\int e^{2x}\,dx\right]\\&=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{e^{2x}}\left[C+\frac{1}{2}e^{2x}\right]\end{aligned}$$

pro všechny reálné konstanty C.

Poněvadž naše řešení $\mathfrak{C}(x)$ uvedené diferenciální rovnice má splňovat podmínku $\mathfrak{C}(0) = 0$, plyne odtud, že $\mathfrak{C}(x)$ je tím řešením dotyčné diferenciální rovnice, které je dáno hodnotou $C = -\frac{1}{2}$. Vychází tak, že

$$\mathfrak{C}(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{e^{2x}} \cdot \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}\right).$$

Roznásobením závorky a vykrácením vyjde

$$\mathfrak{C}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{2x}} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

Rozvineme tuto exponenciální generující funkci posloupnosti čísel $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ do mocninné řady. Tak dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2} \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i!} x^i \Big) \Big(\sum_{j=0}^{\infty} x^j \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} \Big) x^n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} \Big) x^n.
\end{aligned}$$

Poněvadž

$$\mathfrak{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n,$$

vychází porovnáním koeficientů u všech mocnin proměnné x v posledních dvou mocninných řadách, že platí

$$c_n = \frac{1}{2} n! - \frac{1}{2} n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!}$$

pro všechna celá čísla $n \geqslant 0$.

Můžeme si nyní položit otázku, jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolená permutace σ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ bude mít lichý počet pevných bodů. Poněvadž všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je celkem $n!$, bude tato pravděpodobnost rovna hodnotě $c_n/n!$. Odtud a z předchozího poznatku pak vyplývá, že tato pravděpodobnost je rovna hodnotě

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!}.$$

Můžeme si dále klást otázku, k jaké hodnotě se bude tato pravděpodobnost blížit pro $n \to \infty$.

Je jasné, že půjde o hodnotu

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{e^2}\right).$$

Pro velké hodnoty čísla n bude tedy zmíněná pravděpodobnost přibližně rovna hodnotě $0,432332358$.