Obyvatelé n-poschoďového domu

V domě majícím n poschodí bydlí lidé. Pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ v i-tém poschodí bydlí i manželských párů. Úkolem je zjistit, kolika způsoby lze z těchto obyvatel domu vybrat skupinu dvojic složených z jednoho muže a jedné ženy, mají-li být splněny následující podmínky. Každá taková dvojice je tvořena obyvateli stejného poschodí, ale nesmí to být manželé. Žádné dvě různé dvojice přitom nepochází z téhož poschodí ani ze dvou poschodí ležících bezprostředně pod sebou.

Nechť b_n je hledaný počet způsobů, jak takovou skupinu dvojic složenou z obyvatel domu sestavit. Najdeme nejprve rekurentní formuli pro čísla b_n. Zřejmě $b_0 = 1$ a $b_1 = 1$. Pro $n \geqslant 2$ z podmínek úlohy rozlišením možností, zda v dané skupině je či není přítomna některá dvojice pocházející z n-tého poschodí, snadno plyne rekurentní vztah

$$b_n = b_{n-1} + n(n-1)b_{n-2}.$$

Směřujeme nyní k využití exponenciální generující funkce pro posloupnost čísel $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. To jest uvažujeme mocninnou řadu

$$\Re(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n.$$

Uvažujme k tomu navíc ještě mocninnou řadu

$$\Im(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Pak ovšem mocninná řada $\Re(x)$ je derivací mocninné řady $\Im(x)$, čili máme rovnost $\Re(x) = \Im'(x)$. Z uvedené rekurentní formule pak plyne

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n!} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)b_{n-2}}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n!} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_{n-2}}{(n-2)!} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(n+1)!} x^{n+1} + x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n.\end{aligned}$$

Z toho využitím počátečních podmínek vyplývá

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(n+1)!} x^{n+1} + x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n,$$

neboli

$$\Re(x) = 1 + \Im(x) + x^2 \cdot \Re(x),$$

anebo jinak

$$(1 - x^2)\cdot\Re(x) = \Im(x) + 1,$$

takže

$$\Re(x) = \frac{1}{1 - x^2}\cdot\Im(x) + \frac{1}{1 - x^2}.$$

Poněvadž $\Re(x) = \Im'(x)$, dostáváme tak lineární diferenciální rovnici 1. řádu

$$\Im'(x) = \frac{1}{1 - x^2}\cdot\Im(x) + \frac{1}{1 - x^2}$$

pro neznámou funkci $\Im(x)$, přičemž $\Im(0) = 0$.

Připomeňme z kurzu matematické analýzy, že obecným řešením lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x)$$

je množina funkcí

$$y(x) = e^{\int f(x)dx}\left[C + \int g(x)e^{-\int f(x)dx}dx\right]$$

pro všechny reálné konstanty C.

Obecným řešením výše uvedené diferenciální rovnice pro $\Im(x)$ je tedy množina funkcí

$$e^{\int \frac{1}{1-x^2}dx}\left[C + \int \frac{1}{1 - x^2}e^{-\int \frac{1}{1-x^2}dx}dx\right]$$

pro všechny reálné konstanty C.

Přitom

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x},$$

takže

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{1-x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

odkud plyne

$$e^{\int \frac{1}{1-x^2}\,dx} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Takže obecným řešením shora uvedené diferenciální rovnice pro $\Im(x)$ je množina funkcí

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[C + \int \frac{1}{1-x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx\right],$$

to jest množina funkcí

$$\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\left[C + \int \frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}\sqrt{1-x}}\,dx\right]$$

pro všechny reálné konstanty C.

Integrál
$$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}\sqrt{1-x}}\,dx$$
vystupující v poslední formuli je primitivní funkcí $F(x)$ k zlomku uvedenému v tomto integrálu. Tato primitivní funkce $F(x)$ je určena jednoznačně až na aditivní konstantu. Zvolme tuto konstantu tak, aby primitivní funkce $F(x)$ splňovala podmínku $F(0) = 0$. Potom vzhledem k tomu, že naše řešení $\Im(x)$ uvedené diferenciální rovnice má splňovat podmínku $\Im(0) = 0$, plyne odtud, že $\Im(x)$ je tím řešením řečené diferenciální rovnice, které je dáno hodnotou $C = 0$. Vychází tak, že
$$\Im(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,F(x),$$
kde
$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}\sqrt{1-x}}\,dx \quad \text{splňuje} \quad F(0) = 0.$$
Vraťme se k úkolu vypočíst čísla b_n pro všechna $n \geqslant 0$. Z definice mocninné řady
$$\Im(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(n+1)!} x^{n+1}$$
plyne, že pro její derivaci $\Im^{(n+1)}(x)$ vzatou v nule vychází
$$\Im^{(n+1)}(0) = b_n.$$

Abychom tedy vypočetli čísla b_n, je třeba nejprve najít všechny kladné derivace nalezeného řešení $\Im(x)$ naší diferenciální rovnice. Toto řešení lze přepsat do tvaru

$$\Im(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot F(x),$$

kde

$$F(x) = \int (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} \, dx \quad \text{splňuje} \quad F(0) = 0.$$

To znamená, že

$$F'(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}}.$$

Odtud vzhledem k známým vztahům o derivacích součinů funkcí plyne, že

$$\begin{aligned}
\Im^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left[(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(k)} \cdot F^{(n+1-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left[(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(k)} \cdot F^{(n+1-k)}(x) \\
&\quad + \left[(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(n+1)} \cdot F(x).
\end{aligned}$$

Poněvadž $F(0) = 0$ a my potřebujeme vypočíst $\Im^{(n+1)}(0)$, stačí počítat pouze sumu v prvním sčítanci za poslední rovností. Vzhledem k výše uvedenému vyjádření derivace $F'(x)$ lze tuto sumu přepsat ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}[(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(k)}\cdot[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+x)^{-\frac{3}{2}}]^{(n-k)}.$$

Výpočtem naznačených derivací součinů funkcí nabývá posléze tato suma tvaru

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left[\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}[(1+x)^{\frac{1}{2}}]^{(\ell)}\cdot[(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(k-\ell)}\right]\cdot \left[\sum_{g=0}^{n-k}\binom{n-k}{g}[(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(g)}\cdot[(1+x)^{-\frac{3}{2}}]^{(n-k-g)}\right].$$

Postupnými úpravami přejde nakonec tato suma do tvaru

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k}\sum_{g=0}^{n-k}\frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}\binom{n-k}{g}[(1+x)^{\frac{1}{2}}]^{(\ell)}\cdot[(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(k-\ell)}\cdot [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(g)}\cdot[(1+x)^{-\frac{3}{2}}]^{(n-k-g)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k}\sum_{g=0}^{n-k}\frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{\ell,k-\ell,g,n-k-g}[(1+x)^{\frac{1}{2}}]^{(\ell)}\cdot[(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(k-\ell)}\cdot [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(g)}\cdot[(1+x)^{-\frac{3}{2}}]^{(n-k-g)}$$

$$= \sum_{\substack{\ell,i,g,j\geqslant 0\\ \ell+i+g+j=n}} \frac{n+1}{n+1-\ell-i}\binom{n}{\ell,i,g,j}[(1+x)^{\frac{1}{2}}]^{(\ell)}\cdot[(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(i)}\cdot$$
$$[(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(g)}\cdot[(1+x)^{-\frac{3}{2}}]^{(j)}.$$

Připomeňme, že známe rozvoje funkcí

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{p=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{p}x^p,$$
$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\binom{-\frac{1}{2}}{q}x^q,$$
$$(1+x)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-\frac{3}{2}}{r}x^r.$$

Hodnoty derivací těchto funkcí naznačených v poslední shora vyčíslené sumě v nule pak vycházejí

$$\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]^{(\ell)}_{x=0} = \binom{\frac{1}{2}}{\ell}\ell!,$$
$$\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(i)}_{x=0} = (-1)^i\binom{-\frac{1}{2}}{i}i!,$$

$$\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(g)}_{x=0} = (-1)^g \binom{-\frac{1}{2}}{g} g!,$$

$$\left[(1+x)^{-\frac{3}{2}}\right]^{(j)}_{x=0} = \binom{-\frac{3}{2}}{j} j!.$$

Víme už, že $b_n = \Im^{(n+1)}(0)$ a že toto číslo je rovno hodnotě již zmíněné shora vyčíslené sumy v nule. S využitím předchozích vztahů tedy dostáváme

$$\Im^{(n+1)}(0) = \sum_{\substack{\ell,i,g,j\geqslant 0\\ \ell+i+g+j=n}} (-1)^{i+g} \frac{n+1}{n+1-\ell-i} \binom{n}{\ell,i,g,j} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{\ell} \ell! \binom{-\frac{1}{2}}{i} i! \binom{-\frac{1}{2}}{g} g! \binom{-\frac{3}{2}}{j} j!$$

$$= (n+1)! \cdot \sum_{\substack{\ell,i,g,j\geqslant 0\\ \ell+i+g+j=n}} \frac{(-1)^{i+g}}{n+1-\ell-i} \binom{\frac{1}{2}}{\ell} \binom{-\frac{1}{2}}{i} \binom{-\frac{1}{2}}{g} \binom{-\frac{3}{2}}{j}.$$

Poněvadž ještě $n+1-\ell-i = \ell+i+g+j+1-\ell-i = g+j+1$, nakonec tedy vychází

$$b_n = (n+1)! \cdot \sum_{\substack{\ell,i,g,j \geqslant 0 \\ \ell+i+g+j=n}} \frac{(-1)^{i+g}}{g+j+1} \binom{\frac{1}{2}}{\ell} \binom{-\frac{1}{2}}{i} \binom{-\frac{1}{2}}{g} \binom{-\frac{3}{2}}{j}$$

pro všechna $n \geqslant 0$.