Diferenční počet

Buď K těleso charakteristiky 0. Buď f funkce definovaná na množině všech nezáporných celých čísel s hodnotami v tělese K. Definujeme novou funkci Δf, zvanou první diference funkce f, formulí

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

pro všechna nezáporná celá čísla n. Operátor Δ definovaný takto na množině všech řečených funkcí f, zvaný operátor diference, lze aplikovat opakovaně. Dostáváme tak pro každé kladné celé číslo k operátor Δ^k definovaný indukcí prostřednictvím formule

$$\Delta^{k+1} f = \Delta(\Delta^k f).$$

Funkci $\Delta^k f$ nazýváme k-tou diferencí funkce f.

Definujme jiný operátor E, zvaný operátor posunutí, na množině všech zmíněných funkcí f formulí

$$\mathrm{E} f(n) = f(n+1)$$

pro všechna nezáporná celá čísla n. Pak máme $\Delta = \mathrm{E} - \mathrm{I}$, kde I je operátor identity. Pak pro každé nezáporné celé číslo n a pro každé kladné celé číslo k dostáváme

$$\Delta^k f(n) = (\mathrm{E} - \mathrm{I})^k f(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \mathrm{E}^i f(n)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(n+i),$$

což dává explicitní formuli pro hodnotu $\Delta^k f(n)$ vyjádřenou pomocí hodnot $f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k)$. Podobně máme $\mathrm{E} = \Delta + \mathrm{I}$, odkud pro každé nezáporné celé číslo n a pro každé kladné celé číslo k dostáváme

$$f(n+k) = \mathrm{E}^k f(n) = (\Delta + \mathrm{I})^k f(n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i f(n)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\Delta^i f(n)}{i!} [k]_i,$$

kde $\Delta^0 f$ je rovno funkci f. Tuto formuli lze chápat jako rozvoj funkce f se středem v bodě n prostřednictvím diferencí f, Δf, $\Delta^2 f$, ... , $\Delta^k f$.

Buď nyní k libovolné kladné celé číslo a buď g libovolná funkce $k+2$ proměnných nabývajících hodnot v tělese K. Potom vztah

$$g(n, y(n), \Delta y(n), \Delta^2 y(n), \dots, \Delta^k y(n)) = 0$$

mezi proměnnou n nabývající nezáporných celočíselných hodnot, neznámou funkcí $y(n)$ nabývající hodnot v tělese K a mezi diferencemi $\Delta y(n)$, $\Delta^2 y(n)$, ... , $\Delta^k y(n)$ této neznámé funkce se nazývá obyčejná diferenční rovnice. Vzhledem k předchozímu vyjádření diferencí $\Delta y(n)$, $\Delta^2 y(n)$, ... , $\Delta^k y(n)$ naší nyní neznámé funkce $y(n)$ pomocí hodnot $y(n), y(n+1), \dots, y(n+k)$ lze tuto obyčejnou diferenční rovnici zapsat také ve tvaru

$$h(n, y(n), y(n+1), y(n+2), \dots, y(n+k)) = 0$$

pro jistou funkci h téhož počtu proměnných nabývajících hodnot v tělese K. Jestliže v této rovnici vystupují skutečně funkce $y(n)$ i $\Delta^k y(n)$, anebo funkce $y(n)$ i $y(n+k)$, říkáme, že tato diferenční rovnice je řádu k.

Řekneme, že naše diferenční rovnice je lineární, je-li lineární v neznámé funkci $y(n)$ a v jejích diferencích $\Delta y(n)$, $\Delta^2 y(n)$, ... , $\Delta^k y(n)$, anebo též, je-li lineární ve funkci $y(n)$ a také ve funkcích $y(n+1)$, $y(n+2)$, ... , $y(n+k)$.

Obecný tvar lineární diferenční rovnice k-tého řádu je potom

$$y(n+k) + q_1(n)y(n+k-1) + q_2(n)y(n+k-2) + \cdots + q_k(n)y(n) = \psi(n),$$

kde $q_1(n), q_2(n), \ldots, q_k(n)$ a $\psi(n)$ jsou nějaké funkce jedné proměnné n nabývající nezáporných celočíselných hodnot; tyto funkce pak samy nabývají hodnot v tělese K. Je-li přitom funkce $\psi(n)$ identicky rovna nule, mluvíme o homogenní lineární diferenční rovnici; v opačném případě mluvíme o nehomogenní lineární diferenční rovnici.

Takovou lineární diferenční rovnici lze potom zapsat také ve tvaru

$$y(n+k) = -q_1(n)y(n+k-1) - q_2(n)y(n+k-2) - \ldots - q_k(n)y(n) + \psi(n).$$

Tato formule má platit pro všechna nezáporná celá čísla n. Dostáváme tak fakticky rekurentní formuli pro posloupnost hodnot $\{y(n)\}_{n=0}^{\infty}$. Mluvíme pak o lineární rekurentní formuli. Je-li zde funkce $\psi(n)$ identicky rovna nule, je řeč o homogenní lineární rekurentní formuli; v opačném případě je řeč o nehomogenní lineární rekurentní formuli.

Ve speciálním případě, jsou-li v předchozí lineární diferenční rovnici všechny funkce $q_1(n), q_2(n), \dots, q_k(n)$ konstantní na množině všech nezáporných celých čísel, to jest platí-li rovnosti $q_1(n) = a_1$, $q_2(n) = a_2$, ... , $q_k(n) = a_k$ pro všechna nezáporná celá čísla n, kde $a_1, a_2, \dots, a_k$ jsou nějaké prvky tělesa K, pak je řeč o lineární diferenční rovnici s konstantními koeficienty. Obecný tvar takové rovnice tedy je

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + a_2 y(n+k-2) + \dots + a_k y(n) = \psi(n),$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_k$ jsou zmíněné prvky tělesa K a $\psi(n)$ je nějaká funkce proměnné n.

Můžeme k této poslední lineární diferenční rovnici opět pořídit příslušnou lineární rekurentní formuli, která bude nyní mít tvar

$$y(n+k) = -a_1 y(n+k-1) - a_2 y(n+k-2) - \ldots - a_k y(n) + \psi(n)$$

a má platit pro všechna nezáporná celá čísla n. V tomto případě mluvíme o lineární rekurentní formuli s konstantními koeficienty. Je-li zde navíc $a_k \neq 0$, jde o rekurentní formuli řádu k.