Obarvení stěn pravidelného osmistěnu

Klademe otázku, kolik existuje obarvení stěn pravidelného osmistěnu třemi barvami, považujeme-li za stejná taková dvě obarvení, z nichž jedno přejde na druhé při nějakém otočení osmistěnu.

Budeme zprvu řešit nepatrně obecnější úlohu, která spočívá v tom, že se budeme ptát na počet obarvení stěn pravidelného osmistěnu n barvami, kde n je nějaké kladné celé číslo.

Směřujeme k aplikaci Burnsideova lemmatu. Množinou M bude množina všech n^8 obarvení stěn osmistěnu, považujeme-li v tuto chvíli náš osmistěn za nehybný. Pracujeme tedy dále s grupou S_M všech permutací této množiny M. Podgrupou H této grupy S_M bude grupa všech těch permutací množiny M, které vzniknou, když vezmeme nějaké otočení osmistěnu a pro každé obarvení stěn nehybného osmistěnu budeme sledovat, jaké obarvení stěn tohoto osmistěnu z toho vznikne, když provedeme dotyčné otočení osmistěnu. Mělo by být jasné, že zkoumaná obarvení stěn pravidelného osmistěnu, když tímto osmistěnem teď můžeme otáčet, vzájemně jednoznačně odpovídají orbitám jednotlivých obarvení nehybného osmistěnu v podgrupě H. Určit počet všech obarvení stěn osmistěnu, jestliže jím nyní lze otáčet, tedy znamená určit počet orbit grupy H.

Jsou tedy permutace podgrupy H popsaným způsobem indukovány jednotlivými otočeními pravidelného osmistěnu. Těmto otočením říkáme přímé symetrie pravidelného osmistěnu. Označme K grupu všech těchto přímých symetrií pravidelného osmistěnu. Je-li $n > 1$, pak různým otočením osmistěnu, tedy různým symetriím z grupy K, takto zřejmě odpovídají různé permutace z grupy H. Je vidět, že v tomto případě je grupa H izomorfní grupě K. Věnujme se nyní popisu všech symetrií z grupy K.

Zvolme pevně některou stěnu S pravidelného osmistěnu a zvolme dále některou stěnu T pravidelného osmistěnu, která sousedí se stěnou S. Pak každá přímá symetrie osmistěnu je jednoznačně zadána tím, na kterou stěnu osmistěnu se zobrazí stěna S a na kterou z jejích sousedních stěn se zobrazí stěna T. Přitom stěnu S je možno takto zobrazit na kteroukoliv z osmi stěn pravidelného osmistěnu, a je-li tento obraz již určen, je možno dále stěnu T zobrazit na kteroukoliv ze tří sousedních stěn této stěny. Je tedy celkem $8 \cdot 3 = 24$ přímých symetrií pravidelného osmistěnu. Má tedy grupa K všech přímých symetrií pravidelného osmistěnu celkem 24 prvků. Dá se dokonce ukázat, že tato grupa K je izomorfní grupě S_4 všech permutací čtyřprvkové množiny.

Vypíšeme nyní všech 24 přímých symetrií z grupy K. Jsou to následující symetrie:

- Identita.
- Osm otočení kolem os procházejících středy protilehlých stěn; takové osy jsou čtyři, přitom kolem každé osy lze otočit o $\frac{2\pi}{3}$ a o $\frac{4\pi}{3}$.
- Šest otočení kolem os procházejících středy protilehlých hran; takových os je šest, přitom kolem každé osy lze otočit jen o π.
- Devět otočení kolem os procházejících protilehlými vrcholy; takové osy jsou tři, přitom kolem každé osy lze otočit o $\frac{\pi}{2}$, o π a o $\frac{3\pi}{2}$.

Celkem jsme tak vypsali 24 různých symetrií, jsou to tedy všechny symetrie z grupy K.

Nyní, abychom mohli aplikovat Burnsideovo lemma, pro každou z těchto symetrií ς pravidelného osmistěnu určíme počet pevných bodů permutace σ množiny M indukované symetrií ς. Těmito pevnými body permutace σ budou ta obarvení stěn nehybného osmistěnu, která se nezmění po provedení příslušného otočení ς tohoto osmistěnu.

Počet pevných bodů takové permutace σ množiny M jsme značili symbolem $j_1(\sigma)$. Pro každé otočení ς z grupy K tedy určíme hodnotu $j_1(\sigma)$ odpovídající permutace σ z grupy H:

- Je-li symetrie ς identita, pak pevnými body permutace σ jsou všechna obarvení stěn osmistěnu, takže $j_1(\sigma) = n^8$.
- Je-li symetrie ς otočením kolem jedné z os procházející středy některých dvou protilehlých stěn, pak ať už jde o otočení o $\frac{2\pi}{3}$ nebo o $\frac{4\pi}{3}$, aby obarvení stěn osmistěnu bylo pevným bodem permutace σ, musí být tři stěny osmistěnu sousedící s jednou z daných dvou protilehlých stěn obarveny stejnou barvou a také tři stěny sousedící s druhou z těchto dvou protilehlých stěn musí být obarveny stejnou barvou. Z toho ovšem plyne, že $j_1(\sigma) = n^4$.
- Je-li symetrie ς otočením kolem jedné z os procházející středy některých dvou protilehlých hran, pak aby obarvení stěn osmistěnu bylo pevným bodem permutace σ, musí být dvě stěny sousedící s jednou z daných dvou protilehlých hran obarveny stejnou barvou a také dvě stěny sousedící s druhou z těchto dvou protilehlých hran musí být obarveny stejnou barvou. Zbývající čtyři stěny pak tvoří dvě dvojice navzájem protilehlých stěn; stěny každé z těchto dvou dvojic pak také musí být obarveny stejnou barvou. Odtud plyne, že $j_1(\sigma) = n^4$.
- Je-li symetrie ς otočením kolem jedné z os procházející dvěma protilehlými vrcholy o π, musí pro každý z těchto dvou vrcholů a pro každou dvojici stěn obsahujících takový vrchol, které spolu nesousedí hranou, platit, že obě tyto stěny jsou obarveny stejnou barvou. Jsou takové čtyři dvojice stěn, takže $j_1(\sigma) = n^4$.

- Konečně je-li symetrie ς otočením kolem jedné z os procházející dvěma protilehlými vrcholy o $\frac{\pi}{2}$ nebo o $\frac{3\pi}{2}$, pak je jasné, že všechny čtyři stěny obsahující jeden z těchto dvou vrcholů musí být obarveny stejnou barvou a také všechny čtyři stěny obsahující druhý z těchto dvou vrcholů musí být obarveny stejnou barvou. Odtud ovšem plyne, že $j_1(\sigma) = n^2$.

Podle Burnsideova lemmatu je tedy počet orbit v grupě H roven číslu

$$\frac{1}{24}\left(n^8 + 8 \cdot n^4 + 6 \cdot n^4 + 3 \cdot n^4 + 6 \cdot n^2\right) = \frac{1}{24}\left(n^8 + 17 \cdot n^4 + 6 \cdot n^2\right).$$

Tolik je také potom různých obarvení stěn pravidelného osmistěnu n barvami, je-li možné s osmistěnem otáčet. Jmenovitě pro $n = 3$ je celkem

$$\frac{1}{24}\left(3^8 + 17 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^2\right) = 333$$

obarvení stěn pravidelného osmistěnu třemi barvami, která na sebe navzájem nemohou přejít při jakémkoliv otočení osmistěnu.