Obarvení rulety podruhé

Mějme kolo rulety rozdělené do n sektorů. Každý z těchto sektorů obarvíme jednou barvou z celkového počtu k barev tak, aby byly splněny následující podmínky. Předem jsou dána nezáporná celá čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$ taková, že $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Potom za přípustná považujeme taková obarvení sektorů rulety, kdy n_1 sektorů je obarveno první barvou, n_2 sektorů je obarveno druhou barvou, ... , až n_k sektorů je obarveno poslední barvou. V této situaci pak klademe otázku, kolik obarvených kol takto můžeme dostat, považujeme-li za stejná taková dvě obarvení, z nichž jedno vznikne z druhého nějakým pootočením rulety.

Směřujeme k aplikaci Pólyovy-de Bruijnovy věty. Množinou M zde bude množina všech sektorů rulety. Množinou Y bude množina všech použitých barev. Podmnožinou $\mathcal{F}$ množiny Y^M všech zobrazení $f : M \to Y$ bude množina všech těch zobrazení f, která zobrazí n_1 sektorů na první barvu, n_2 sektorů na druhou barvu, ..., až n_k sektorů na poslední barvu. Tato podmnožina $\mathcal{F}$ je očividně uzavřená vzhledem ke každé podgrupě grupy S_M všech permutací množiny M. V našem případě podgrupou H grupy S_M bude grupa všech otočení rulety. Pak H bude cyklická grupa, která bude generovaná jedním cyklem θ délky n zobrazujícím první sektor na druhý sektor, druhý sektor na třetí sektor, ... , až předposlední sektor na poslední sektor a poslední sektor zase na první sektor.

Takže podgrupa H bude pozůstávat ze všech permutací tvaru θ^i pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$, přičemž θ^n bude identita id_M na množině M. K této podgrupě H vezměme jí odpovídající podgrupu E^H grupy $S_{\mathcal{F}}$ všech permutací podmnožiny $\mathcal{F}$. Pak orbity grupy E^H budou odpovídat vzájemně odlišitelným obarvením sektorů rulety.

Věnujme se nyní chvíli obecné permutaci θ^i grupy H pro nějaké zvolené $i = 1, 2, \dots, n$. Buď r největší společný dělitel čísel i a n a buď $s = \frac{n}{r}$. Pak se permutace θ^i skládá z r vzájemně nezávislých cyklů délky s. Skutečně podle Bezoutovy věty máme $r = ia - nb$ pro jistá kladná celá čísla a a b, odkud plyne $(\theta^i)^a = \theta^{r+nb} = \theta^r$. Položíme-li ještě $t = \frac{i}{r}$, pak máme také $(\theta^r)^t = \theta^i$. Z těchto vztahů vyplývá, že permutace θ^i a θ^r jsou téhož typu (jejich rozklady na součiny nezávislých cyklů mají stejné počty cyklů jednotlivých délek). Poněvadž θ je cyklus délky n a číslo r dělí číslo n, permutace θ^r se zřejmě skládá z r vzájemně nezávislých cyklů délky s. Totéž pak platí také pro permutaci θ^i. Navíc pak $t \leqslant s$ a čísla s a t jsou vzájemně nesoudělná. Počet takových čísel t udává Eulerova funkce φ, je totiž $\varphi(s)$ rovno počtu těch kladných celých čísel t, která nepřevyšují číslo s a jsou s číslem s nesoudělná. Tolik je také těch permutací tvaru θ^i, které jsou téhož typu jako permutace θ^r pro dané kladné celé číslo r dělící číslo n.

Označili jsme symbolem $\mathfrak{M}_{\mathcal{F};H}$ množinu všech orbit grupy E^H jakožto podgrupy grupy permutací $S_{\mathcal{F}}$. Naším úkolem je určit počet prvků množiny $\mathfrak{M}_{\mathcal{F};H}$. Podle důsledku Pólyovy-de Bruijnovy věty je tento počet roven číslu

$$|\mathfrak{M}_{\mathcal{F};H}| = \frac{1}{|H|} \sum_{\delta \in H} |\{f \in \mathcal{F} : f \circ \delta = f\}|.$$

Zde řád $|H|$ grupy H je roven číslu n. Prvky δ grupy H jsou všechny permutace tvaru θ^i pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$. Je vidět, že zobrazení $f \in \mathcal{F}$ jakožto zobrazení $f : M \to Y$ splňuje podmínku $f \circ \delta = f$ právě tehdy, když f je konstantní na všech třídách rozkladu množiny M na prvky nezávislých cyklů, na něž se rozpadá permutace δ. Ale permutace δ je tvaru θ^i pro některé $i = 1, 2, \ldots, n$, a tato permutace se rozpadá na r nezávislých cyklů stejné délky s, kde r je největší společný dělitel čísel i a n a $s = \frac{n}{r}$. Rozklad množiny M na prvky těchto r nezávislých cyklů pak určuje typ dotyčné permutace θ^i. Viděli jsme v předchozím odstavci, že daná permutace θ^i je téhož typu jako permutace θ^r a že počet těch exponentů i, pro něž permutace θ^i je téhož typu jako permutace θ^r při daném děliteli r čísla n, je roven číslu $\varphi(s)$. Konečně je patrno, že pro libovolné dvě permutace θ^i a θ^j grupy H téhož typu platí rovnost

$$|\{f \in \mathcal{F} : f \circ \theta^i = f\}| = |\{f \in \mathcal{F} : f \circ \theta^j = f\}|.$$

Počet těch zobrazení $f \in \mathcal{F}$, která jsou konstantní na všech třídách rozkladu množiny M na prvky nezávislých cyklů permutace θ^i totiž závisí pouze na typu permutace θ^i, nikoliv na permutaci θ^i samotné. Ještě poznamenejme, že probíhá-li číslo r všechny dělitele čísla n, pak také číslo $s = \frac{n}{r}$ probíhá všechny dělitele čísla n. Shrneme-li tyto poznatky, můžeme přepsat shora uvedenou sumu do tvaru

$$|\mathfrak{M}_{\mathcal{F};H}| = \frac{1}{n} \sum_{s|n} \varphi(s)\,|\{f \in \mathcal{F} : f \circ \theta^r = f\}|,$$

kde $rs = n$. Ovšem podmínka $f \circ \theta^r = f$ znamená, že zobrazení f má být konstantní na všech r třídách rozkladu množiny M na prvky nezávislých cyklů, na něž se rozpadá permutace θ^r. Všechny tyto cykly mají délku s. Tedy všechny třídy zmíněného rozkladu množiny M mají s prvků. Připomeňme ještě jednou, že $\mathcal{F}$ je množina všech těch zobrazení $f : M \to Y$, která zobrazí n_1 prvků na první barvu z Y, n_2 prvků na druhou barvu z Y, ..., až n_k prvků na poslední barvu z Y. Není-li nyní některé z čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$ dělitelné číslem s, není možné podmínku $f \circ \theta^r = f$ splnit, takže příslušný sčítanec ve výše uvedené sumě je roven nule. Stačí tedy sčítat pouze přes ta čísla s, která dělí všechna čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Předchozí suma tak přejde do tvaru

$$|\mathfrak{M}_{\mathcal{F};H}| = \frac{1}{n} \sum_{s|\gcd\{n_1,n_2,\ldots,n_k\}} \varphi(s)\,|\{f \in \mathcal{F} : f \circ \theta^r = f\}|,$$

kde $rs = n$ a gcd značí největšího společného dělitele uvedených čísel. Zbývá tak už jen určit počet $|\{f \in \mathcal{F} : f \circ \theta^r = f\}|$, to jest počet těch zobrazení $f : M \to Y$, která jsou konstantní na všech r třídách rozkladu množiny M na prvky nezávislých cyklů permutace θ^r. Tyto třídy jsou všechny velikosti s.

Současně tato zobrazení $f: M \to Y$ mají zobrazit n_1 prvků na první barvu, n_2 prvků na druhou barvu, ..., až n_k prvků na poslední barvu. Taková zobrazení $f: M \to Y$ indukují zobrazení tříd uvedeného rozkladu množiny M do množiny Y, těchto tříd je celkem $r = \frac{n}{s}$, přičemž $\frac{n_1}{s}$ tříd se má zobrazit na první barvu, $\frac{n_2}{s}$ tříd se má zobrazit na druhou barvu, ..., až $\frac{n_k}{s}$ tříd se má zobrazit na poslední barvu. Jedná se tedy o permutace s opakováním, jejichž počet je dán polynomickým koeficientem

$$|\{f \in \mathcal{F} : f \circ \theta^r = f\}| = \binom{\frac{n}{s}}{\frac{n_1}{s}, \frac{n_2}{s}, \dots, \frac{n_k}{s}}.$$

Celkem je tedy počet prvků množiny $\mathfrak{M}_{\mathcal{F};H}$ roven

$$|\mathfrak{M}_{\mathcal{F};H}| = \frac{1}{n} \sum_{s \mid \gcd\{n_1, n_2, \dots, n_k\}} \varphi(s) \binom{\frac{n}{s}}{\frac{n_1}{s}, \frac{n_2}{s}, \dots, \frac{n_k}{s}}.$$

Tolik je tedy také všech přípustných vzájemně rozlišitelných obarvení sektorů naší rulety.