Pólyova věta pro libovolná zobrazení

Poté co jsme dokázali Pólyovu-de Bruijnovu větu v plné obecnosti, věnujme se jejím speciálním případům, které vyvstanou, když za množinu zobrazení $\mathcal{F}$ vezmeme některé speciální podmnožiny množiny Y^M uzavřené vzhledem ke každé podgrupě H grupy S_M. Znění Pólyovy-de Bruijnovy věty se v některých těchto případech zjednoduší. Jako první se v tomto ohledu nabízí sama celá množina Y^M.

Zaveďme následující značení pro sumy mocnin proměnných. Pro každé kladné celé číslo k položme

$$s_k = \sum_{\wp \in Y} x_{\wp}^k.$$

Pak s použitím cyklového indexu $Z(H)$ permutační grupy H můžeme zformulovat a dokázat následující Pólyovu větu:

Věta.

Enumerátor $\gamma(Y^M, H)$ je dán formulí

$$\gamma(Y^M, H) = Z(H; s_1, s_2, \ldots, s_m).$$

Důkaz.

Podle Pólyovy-de Bruijnovy věty platí

$$\gamma(Y^M, H) = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} \Big(\sum_{f \in Y^M, f \circ \sigma = f} v(f) \Big).$$

Buď nyní $\sigma \in H$ libovolná, pevně zvolená permutace. Předpokládejme, že σ je permutace typu $1^{j_1(\sigma)} 2^{j_2(\sigma)} \dots m^{j_m(\sigma)}$. Nechť rozklad $r(\sigma)$ množiny M indukovaný permutací σ pozůstává z podmnožin $C_1, C_2, \dots, C_q$. Připomeňme, že tyto podmnožiny jsou složeny z prvků nezávislých cyklů, na něž se rozpadá permutace σ. Pak ovšem platí $q = j_1(\sigma) + j_2(\sigma) + \dots + j_m(\sigma)$.

Uvědomme si, že požadavek $f \circ \sigma = f$ znamená, že zobrazení f je konstantní na všech podmnožinách $C_1, C_2, \dots, C_q$. Má tedy smysl v této situaci mluvit o hodnotách $f(C_1), f(C_2), \dots, f(C_q)$. Zobrazení f splňující $f \circ \sigma = f$ je pak plně určeno touto q-ticí hodnot a pro člen $v(f)$ platí

$$v(f) = x_{f(C_1)}^{|C_1|} x_{f(C_2)}^{|C_2|} \cdots x_{f(C_q)}^{|C_q|}.$$

Protože pracujeme s množinou Y^M všech zobrazení $f : M \to Y$, mohou být hodnotami $f(C_1), f(C_2), \dots, f(C_q)$ libovolné prvky z Y, odkud plyne, že

$$\sum_{f\in Y^M, f\circ\sigma=f} v(f) = \sum_{(\wp_1,\wp_2,\ldots,\wp_q)} x_{\wp_1}^{|C_1|} x_{\wp_2}^{|C_2|} \cdots x_{\wp_q}^{|C_q|},$$

kde $(\wp_1, \wp_2, \ldots, \wp_q)$ probíhá přes všechny uspořádané q-tice prvků z Y. Nyní si všimněme, že tuto poslední sumu zřejmě dostaneme roznásobením výrazu

$$\Big(\sum_{\wp\in Y} x_\wp^1\Big)^{j_1(\sigma)} \Big(\sum_{\wp\in Y} x_\wp^2\Big)^{j_2(\sigma)} \cdots \Big(\sum_{\wp\in Y} x_\wp^m\Big)^{j_m(\sigma)}.$$

To je ale právě součin sum mocnin proměnných

$$s_1^{j_1(\sigma)} s_2^{j_2(\sigma)} \cdots s_m^{j_m(\sigma)},$$

což je výraz, který dostaneme dosazením sum $s_1, s_2, \ldots, s_m$ za proměnné $t_1, t_2, \ldots, t_m$ do členu $Z(\sigma)$. Dostáváme tak rovnost

$$\sum_{f\in Y^M, f\circ\sigma=f} v(f) = Z(\sigma; s_1, s_2, \ldots, s_m).$$

Dosazením tohoto poznatku do vyjádření enumerátoru $\gamma(Y^M, H)$ uvedeného na začátku tohoto důkazu konečně dostáváme

$$\gamma(Y^M, H) = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} Z(\sigma; s_1, s_2, \ldots, s_m) = Z(H; s_1, s_2, \ldots, s_m),$$

což jsme měli ukázat. □

Váhová funkce

Uvažme zobrazení w přiřazující každému obrazci $\wp \in Y$ nějaké nezáporné celé číslo $w(\wp)$ takovým způsobem, že pro každé nezáporné celé číslo n existuje jenom konečný počet obrazců $\wp \in Y$ takových, že $w(\wp) = n$. Takové zobrazení w nazveme váhovou funkcí, číslo $w(\wp)$ nazveme vahou obrazce $\wp$.

Za této situace je možno ke každému nezápornému celému číslu n uvažovat nezáporné celé číslo $|w^{-1}(n)|$, to jest počet obrazců $\wp \in Y$ dané váhy n. Označme symbolem d_n toto posledení celé číslo. Označme dále

$$d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

generující řadu pro obrazce dané váhy.

Věnujme se nyní libovolným zobrazením $f : M \to Y$. Vahou takového zobrazení f rozumíme číslo $w(f) = \sum_{a \in M} w(f(a))$. Je-li dále H libovolná podgrupa grupy S_M, můžeme spolu s ní uvažovat orbity libovolných zobrazení $f : M \to Y$ v grupě E^H. Tyto orbity jsme nazvali konfiguracemi. Všimněme si, že jsou-li $f, g : M \to Y$ dvě zobrazení z téže konfigurace, to jest platí-li $g = \overline{\sigma}(f)$ pro nějakou permutaci σ z grupy H, pak pro váhy $w(f)$ a $w(g)$ těchto zobrazení vychází

$$w(g) = w(\overline{\sigma}(f)) = w(f \circ \sigma) = \sum_{a \in M} w(f(\sigma(a))) = \sum_{a \in M} w(f(a)) = w(f),$$

poněvadž σ je permutací množiny M. Můžeme tedy pro každou orbitu $\mathcal{O}$ v grupě E^H korektně definovat její váhu $w(\mathcal{O})$ jako váhu $w(f)$ pro některý (kterýkoliv) prvek f orbity $\mathcal{O}$.

Přesvědčíme se dále, že pro každé nezáporné celé číslo n je počet orbit libovolných zobrazení $f : M \to Y$ v grupě E^H dané váhy n konečný. Tedy počet konfigurací dané váhy n je konečný. Kdyby totiž mělo váhu n nekonečně mnoho konfigurací, mělo by tuto váhu také nekonečně mnoho zobrazení $f : M \to Y$. Pak by ovšem musela být nekonečná také množina $\bigcup \{f(M) : f \in Y^M, w(f) = n\}$, neboť v opačném případě bychom měli nekonečně mnoho zobrazení $f : M \to Y$ konečné množiny M do konečné podmnožiny množiny Y, což není možné. Musela by tedy tato množina $\bigcup \{f(M) : f \in Y^M, w(f) = n\}$ být opravdu nekonečná.

Avšak zde ve sjednocovaných množinách $f(M)$ mohou figurovat pouze obrazce $\wp \in Y$ váhy nejvýše n, neboť $w(f) = \sum_{a \in M} w(f(a)) = n$. Měli bychom tedy nekonečnou podmnožinu obrazců $\wp \in Y$ nabývajících jenom konečně mnoha vah $w(\wp) \leqslant n$. To je ale ve sporu s požadavkem na váhovou funkci w, podle něhož ke každé možné váze existuje jenom konečný počet obrazců $\wp \in Y$ této váhy.

Viděli jsme tedy, že pro každé nezáporné celé číslo n je počet všech konfigurací $\mathcal{O}$ váhy $w(\mathcal{O}) = n$ zase nějaké nezáporné celé číslo. Označme symbolem D_n toto poslední celé číslo. Označme dále

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n$$

generující řadu pro konfigurace dané váhy.

Konečně si povšimněme, že když pro každý obrazec $\wp \in Y$ dosadíme mocninu $x^{w(\wp)}$ za proměnnou $x_\wp$ do členu $v(\mathcal{O})$, dostaneme tak mocninu $x^{w(\mathcal{O})}$. To však znamená, že tímto dosazením do enumerátoru $\gamma(Y^M, H)$ dostaneme řadu $D(x)$. Také si všimněme, že když stejným způsobem dosadíme do sum mocnin proměných $s_1, s_2, \ldots$, dostaneme řady $d(x), d(x^2), \ldots$. To ale znamená, že tímto dosazením nakonec dostaneme z předchozí věty následující speciální podobu Pólyovy věty:

Věta.

Platí rovnost mocniných řad

$$D(x) = Z(H; d(x), d(x^2), \ldots, d(x^m)). \qquad \square$$