Barevné náhrdelníky

Klademe otázku, kolik barevných náhrdelníků pozůstávajících z n korálků lze vytvořit, máme-li k dispozici korálky k různých barev, ode všech barev v dostatečném množství.

Jsme tedy v situaci, kdy nerozlišujeme mezi náhrdelníky, které vzniknou jeden z druhého nějakým pootočením náhrdelníku, avšak také nerozlišujeme mezi náhrdelníky, které vzniknou jeden z druhého překlopením náhrdelníku kolem některé z jeho os.

Chystáme se aplikovat Pólyovu větu pro libovolná zobrazení. Konečnou množinou M bude množina všech n pozic, kam lze umísťovat korálky na náhrdelník, chápeme-li pro tuto chvíli náhrdelník jako pevný objekt, kterým nelze otáčet ani ho nelze překlápět. Množinou obrazců Y bude množina všech k možných barev korálků. Vytvořit náhrdelník chápaný jako pevný objekt znamená pro každou z daných n pozic na náhrdelníku určit, korálek jaké barvy ze všech možných k barev bude na tuto pozici umístěn. Pevné náhrdelníky budou tedy odpovídat libovolným zobrazením $f : M \to Y$.

Nyní se vraťme do situace, kdy je možno s náhrdelníkem otáčet nebo ho lze překlápět, aniž by tím vznikaly nové náhrdelníky.

Takto pojatým náhrdelníkům už neodpovídají jednotlivá zobrazení $f : M \to Y$, ale odpovídají jim orbity těchto zobrazení v permutační grupě na množině Y^M indukované grupou pozůstávající ze všech pootočení a ze všech překlopení náhrdelníku. To je ale dihedrální grupa D_M stupně n. Ptáme se tedy na počet orbit libovolných zobrazení $f : M \to Y$ v permutační grupě E^{D_M} na množině Y^M.

Podle Pólyovy věty pro libovolná zobrazení ale máme pro příslušný enumerátor $\gamma(Y^M, D_M)$ vztah

$$\gamma(Y^M, D_M) = Z(D_M; s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Víme, že počet náhrdelníků, které se budou navzájem lišit, i když budeme moci náhrdelníky otáčet nebo je budeme překlápět, dostaneme, když dosadíme hodnotu 1 za všechny proměnné do enumerátoru. Máme celkem k proměnných, poněvadž množina Y obsahuje k barev, a sumy $s_1, s_2, \ldots, s_n$ jednotlivých mocnin těchto proměnných tedy mají k sčítanců. Po dosazení hodnoty 1 za všechny proměnné pak všechny tyto sumy přejdou v hodnotu k. Takže pro počet navzájem odlišitelných náhrdelníků dostáváme vztah

$$|\mathfrak{M}_{Y^M, D_M}| = Z(D_M; k, k, \ldots, k).$$

V tomto vztahu se vyskytuje cyklový index $Z(D_M)$ dihedrální grupy D_M. Z dřívějška víme, že tento cyklový index má tvar

$$Z(D_M) = \frac{1}{2} Z(C_M) + \frac{1}{2}\, t_1 t_2^{\frac{n-1}{2}},$$

je-li počet n korálků na náhrdelníku lichý, a

$$Z(D_M) = \frac{1}{2} Z(C_M) + \frac{1}{4}\left(t_2^{\frac{n}{2}} + t_1^2 t_2^{\frac{n-2}{2}}\right),$$

je-li tento počet n sudý. Přitom C_M je cyklická grupa řádu n a o jejím cyklovém indexu $Z(C_M)$ víme, že má tvar

$$Z(C_M) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d)\, t_d^{\frac{n}{d}}.$$

Dohromady tak dostáváme

$$Z(D_M) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi(d)\, t_d^{\frac{n}{d}} + \frac{1}{2}\, t_1 t_2^{\frac{n-1}{2}},$$

je-li n liché číslo, a

$$Z(D_M) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi(d)\, t_d^{\frac{n}{d}} + \frac{1}{4}\left(t_2^{\frac{n}{2}} + t_1^2 t_2^{\frac{n-2}{2}}\right),$$

je-li n sudé číslo.

Dosazením hodnoty k za všechny proměnné $t_1, t_2, \ldots, t_n$ do těchto vztahů tak v souladu s výše uvedeným vztahem pro počet navzájem odlišitelných náhrdelníků konečně obdržíme

$$|\mathfrak{M}_{Y^M, D_M}| = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi(d)\, k^{\frac{n}{d}} + \frac{1}{2}\, k^{\frac{n+1}{2}},$$

je-li n liché číslo, a

$$|\mathfrak{M}_{Y^M, D_M}| = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi(d)\, k^{\frac{n}{d}} + \frac{1}{4}\left(k^{\frac{n+2}{2}} + k^{\frac{n}{2}}\right),$$

je-li n sudé číslo.