Lemma o generujících řadách pro cyklové indexy permutačních grup

Buď $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ libovolná posloupnost polynomů s reálnými koeficienty v proměnných $t_1, t_2, \ldots$. Generující řadou této posloupnosti polynomů rozumíme mocninnou řadu $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s proměnnou x. Pro tuto generující řadu $a(x)$, pokud je v ní splněno $a_0 = 0$, definujeme mocninnou řadu $\exp(a(x))$ předpisem

$$\exp(a(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(a(x))^n.$$

Podmínka $a_0 = 0$ zde zaručuje, že v poslední sumě bude u každé mocniny x^n jen konečný počet nenulových koeficientů.

Buď M konečná množina mající m prvků. Můžeme si například představit, že $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Tím je hodnotou m určena i množina M. Platí následující lemma pro generující řadu cyklových indexů $Z(S_M; t_1, t_2, \ldots, t_m)$ grup S_M všech permutací takto pojatých množin M.

Lemma.

Uvažujme mocninnou řadu $\sum_{m=0}^{\infty} Z(S_M; t_1, t_2, \ldots, t_m)x^m$*, to jest generující řadu pro polynomy* $Z(S_M; t_1, t_2, \ldots, t_m)$*. Pro tuto mocninnou řadu platí rovnost*

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z(S_M; t_1, t_2, \ldots, t_m)x^m = \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{i} x^i\Big),$$

klademe-li $Z(S_\emptyset) = 1$*.*

Důkaz.

Pro každé nezáporné celé číslo m určíme koeficient u x^m v řadě $\exp\big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{i} x^i\big)$. Tento koeficient by se ovšem měl rovnat cyklovému indexu $Z(S_M; t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Pro $m = 0$ je tento koeficient roven 1, což souhlasí s tím, že $Z(S_\emptyset) = 1$. Předpokládejme tedy dále, že $m > 0$.

Máme tedy určit koeficient u x^m v řadě

$$\exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{i} x^i\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{i} x^i\Big)^k.$$

Koeficient u x^m v řadě $\big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{i} x^i\big)^k$ je ovšem roven

$$\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=m} \frac{t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k}}{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

Přeformulujeme tuto sumu následovně. Nechť mezi hodnotami $i_1, i_2, \dots, i_k$ v jednotlivém sčítanci v této sumě je j_1 hodnot rovných 1, dále j_2 hodnot rovných 2, ... , až j_m hodnot rovných m. Pak ovšem $j_1 + j_2 + \cdots + j_m = k$ a $1j_1 + 2j_2 + \cdots + mj_m = m$. Počet uspořádaných k-tic $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, které takto dají vzniknout týmž parametrům $(j_1, j_2, \dots, j_m)$, je roven počtu permutací s opakováním a je dán polynomickým koeficientem

$$\binom{k}{j_1, j_2, \dots, j_m} = \frac{k!}{j_1! j_2! \dots j_m!}.$$

To znamená, že předchozí suma udávající koeficient u x^m v řadě $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{i} x^i\right)^k$ je rovna sumě

$$\sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_m=k \\ 1j_1+2j_2+\cdots+mj_m=m}} \frac{k!}{j_1! j_2! \dots j_m!} \frac{t_1^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_m^{j_m}}{1^{j_1} 2^{j_2} \dots m^{j_m}}.$$

Odtud plyne, že koeficient u x^m v řadě $\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{i} x^i\right)$ je roven sumě

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_m=k \\ 1j_1+2j_2+\cdots+mj_m=m}} \frac{k!}{j_1!j_2!\ldots j_m!} \frac{t_1^{j_1} t_2^{j_2} \ldots t_m^{j_m}}{1^{j_1} 2^{j_2} \ldots m^{j_m}}$$

$$= \sum_{1j_1+2j_2+\cdots+mj_m=m} \frac{1}{j_1!j_2!\ldots j_m!\, 1^{j_1} 2^{j_2} \ldots m^{j_m}} t_1^{j_1} t_2^{j_2} \ldots t_m^{j_m}.$$

Podle našich dřívějších poznatků tato poslední suma ale je právě rovna cyklovému indexu $Z(S_M; t_1, t_2, \ldots, t_m)$ grupy S_M všech permutací množiny M. $\square$