Počet neizomorfních kořenových stromů

Uvidíme později, že počet navzájem neizomorfních stromů s daným počtem vrcholů je možné určit, známe-li počty navzájem neizomorfních tzv. kořenových stromů s danými počty vrcholů. Věnujme se tedy nyní navzájem neizomorfním kořenovým stromům.

Buď nejprve $G = (V(G), E(G))$ obyčejný graf, u kterého je označen jeden z vrcholů z $V(G)$. Takový graf G nazýváme kořenovým grafem, označený vrchol $a \in V(G)$ nazýváme kořenem grafu G. Dva kořenové grafy G a $\overline{G}$ s kořeny $a \in V(G)$ a $b \in V(\overline{G})$ se nazývají izomorfní, existuje-li izomorfismus $\varphi : G \to \overline{G}$ takový, že $\varphi(a) = b$. Kořenovým stromem rozumíme kořenový graf G s kořenem $a \in V(G)$ takový, že sám graf G je stromem.

Chystáme se aplikovat Pólyovu větu k určení počtu navzájem neizomorfních kořenových stromů s daným počtem vrcholů. Množinou obrazců Y bude množina, která z každé třídy navzájem izomorfních kořenových stromů obsahuje právě jeden exemplář. Váhovou funkci w definujeme jako funkci udávající pro každý kořenový strom $T \in Y$ počet vrcholů tohoto stromu, to jest $w(T) = |V(T)|$. Pro každé kladné celé číslo n označme $\bar{u}_n$ počet navzájem neizomorfních kořenových stromů majících n vrcholů. Pak řada $\bar{u}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n x^n$ je řadou $d(x)$ z Pólyovy věty.

Vezměme nezáporné celé číslo m a vezměme za M množinu čísel $\{1, 2, \ldots, m\}$. Uvažujme libovolná zobrazení $f : M \to Y$. Každému takovému zobrazení f přiřaďme dále kořenový strom následujícím způsobem. Můžeme předpokládat, že množiny vrcholů kořenových stromů $f(1), f(2), \ldots, f(m)$ jsou navzájem disjunktní. Nyní ke všem těmto vrcholům přidáme ještě jeden nový vrchol, spojíme jej hranami s kořeny stromů $f(1), f(2), \ldots, f(m)$, čímž vznikne nový strom, a prohlásíme tento nově přidaný vrchol za kořen tohoto nově vzniklého stromu. Tento kořen tohoto nového stromu bude mít stupeň m. Přitom tento nový strom bude mít o jeden vrchol více, než je úhrnný počet všech vrcholů stromů $f(1), f(2), \ldots, f(m)$. Takže počet vrcholů tohoto nového stromu bude o jedničku vyšší než součet vah stromů $f(1), f(2), \ldots, f(m)$, to jest než váha zobrazení f. Konečně si všimněme orbit zobrazení $f : M \to Y$ v grupě E^{S_M}. Těmto orbitám odpovídají množiny kořenových stromů, jejichž kořen má stupeň m a které se od sebe navzájem liší, porovnáváme-li je izomorfismem, pouze navíc tím, že také sledujeme, v jakém pořadí bereme hrany vycházející z kořene. Takže těmto orbitám fakticky odpovídají navzájem neizomorfní kořenové stromy, jejichž kořen má stupeň m. Označme tedy $\bar{u}_n^m$ počet navzájem neizomorfních kořenových stromů majících n vrcholů, jejichž kořen má stupeň m. Při tomto označení se řada $\bar{u}^m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n^m x^n$ liší od řady $D(x)$ z Pólyovy věty pouze tím, že je oproti ní ještě vynásobena činitelem x — to odpovídá výše popsanému přidání nového vrcholu. Podle Pólyovy věty tedy máme rovnost

$$\bar{u}^m(x) = xZ(S_M; \bar{u}(x), \bar{u}(x^2), \ldots, \bar{u}(x^m)).$$

Dále zřejmě pro každé n platí $\bar{u}_n = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_n^m$. Tato suma je ve skutečnosti konečná, poněvadž pro $m \geqslant n$ je $\bar{u}_n^m = 0$. Odtud plyne, že

$$\bar{u}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}^m(x).$$

Dosazením za $\bar{u}^m(x)$ z předchozí rovnosti odtud vyplyne, že

$$\bar{u}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} xZ(S_M; \bar{u}(x), \bar{u}(x^2), \ldots, \bar{u}(x^m)).$$

Po rozepsání řady $\bar{u}(x)$ ve tvaru $\bar{u}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_{n+1} x^{n+1}$ a po vydělení činitelem x přejde poslední rovnost do tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_{n+1} x^n = \sum_{m=0}^{\infty} Z(S_M; \bar{u}(x), \bar{u}(x^2), \ldots, \bar{u}(x^m)).$$

Podle lemmatu o generujících řadách pro cyklové indexy permutačních grup platí rovnost

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z(S_M; t_1, t_2, \ldots, t_m) x^m = \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{i} x^i \Big).$$

Dosazením hodnoty 1 za x a řad $\bar{u}(x^i)$ za proměnné t_i pro všechna kladná celá čísla i do této rovnosti obdržíme vztah

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z(S_M; \bar{u}(x), \bar{u}(x^2), \ldots, \bar{u}(x^m)) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{u}(x^i)}{i}\Big).$$

Spojením této poslední rovnosti s předminulou rovností dostaneme vztah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_{n+1} x^n = \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{u}(x^i)}{i}\Big).$$

Odtud logaritmováním vyjde

$$\ln\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_{n+1} x^n\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{u}(x^i)}{i}.$$

Dále derivováním dostaneme

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\bar{u}_{n+1} x^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_{n+1} x^n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{u}'(x^i)}{i} i x^{i-1}.$$

Konečně vynásobením činitelem x a odstraněním zlomku obdržíme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\bar{u}_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_{n+1} x^n \sum_{i=1}^{\infty} \bar{u}'(x^i) x^i.$$

Poněvadž $\bar{u}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k x^k$, můžeme v tomto vztahu ještě dále rozepsat $\bar{u}'(x^i) = \sum_{k=1}^{\infty} k\bar{u}_k x^{ik-i}$. Tímto způsobem po přeznačení indexu n na pravé straně posléze odvodíme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\bar{u}_{n+1}x^n = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{u}_{j+1}x^j \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} k\bar{u}_k x^{ik-i}\Big)x^i = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{u}_{j+1}x^j \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} k\bar{u}_k x^{ik}.$$

Porovnáme koeficienty u x^n na obou stranách této rovnosti. Na levé straně máme ovšem koeficient $n\bar{u}_{n+1}$. Na pravé straně potom máme koeficient $\sum_{j=0}^{\infty} \bar{u}_{j+1} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k\bar{u}_k$, kde navíc žádáme, aby platilo $j + ik = n$. Takže $j < n$. Položme $h = n - j$. Pak $1 \leqslant h \leqslant n$ a $j = n - h$. Koeficient u x^n na pravé straně potom nabude tvaru $\sum_{h=1}^{n} \bar{u}_{n-h+1} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k\bar{u}_k$, přičemž žádáme, aby platilo $ik = h$. To ale znamená, že $k|h$. Lze tedy výraz pro koeficient u x^n na pravé straně ještě přepsat do tvaru $\sum_{h=1}^{n} \bar{u}_{n-h+1}\big(\sum_{k|h} k\bar{u}_k\big)$. Porovnáním koeficientů tak dostáváme rovnost

$$n\bar{u}_{n+1} = \sum_{h=1}^{n} \bar{u}_{n-h+1}\Big(\sum_{k|h} k\bar{u}_k\Big),$$

z níž plyne rovnost

$$\bar{u}_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} \bar{u}_{n-h+1}\Big(\sum_{k|h} k\bar{u}_k\Big),$$

která platí pro všechna kladná celá čísla n.

Poněvadž na pravé straně této rovnosti vystupují koeficienty $\bar{u}_q$ s indexy q rovnými nejvýše n, dává tato rovnost spolu s očividným faktem, že $\bar{u}_1 = 1$, rekurentní formuli pro výpočet všech hodnot $\bar{u}_n$.