Pólyova věta pro injektivní zobrazení

Jiným speciálním případem Pólyovy-de Bruijnovy věty je výsledek, který dostaneme, když za množinu zobrazení $\mathcal{F}$ vezmeme množinu všech injektivních zobrazení $M \to Y$. Označme symbolem $\overline{Y^M}$ tuto množinu všech injektivních zobrazení. Tato podmnožina $\overline{Y^M}$ je očividně uzavřená vzhledem ke každé podgrupě H grupy S_M. Můžeme tak uvažovat příslušnou permutační grupu E^H indukovanou podgrupou H na množině $\overline{Y^M}$. Abychom tuto poslední permutační grupu notačně odlišili od permutační grupy indukované podgrupou H na množině všech zobrazení Y^M, zavedeme pro ni označení $\overline{E^H}$.

Připomeňme, že jsme již zavedli následující značení pro sumy mocnin proměnných. Pro každé kladné celé číslo k jsme položili

$$s_k = \sum_{\wp \in Y} x_{\wp}^k.$$

Pak s použitím cyklového indexu $Z(S_M)$ grupy S_M všech permutací na množině M můžeme zformulovat a dokázat následující Pólyovu větu pro injektivní zobrazení:

Věta.

Enumerátor $\gamma(\overline{Y^M}, H)$ *je dán formulí*

$$\gamma(\overline{Y^M}, H) = \frac{m!}{|H|} Z(S_M; s_1, -s_2, s_3, -s_4, \dots, (-1)^{m-1} s_m).$$

Důkaz.

Dokážeme tuto větu nejprve v případě, kdy $H = S_M$. Pak se jedná o tvrzení, že enumerátor $\gamma(\overline{Y^M}, S_M)$ je dán formulí

$$\gamma(\overline{Y^M}, S_M) = Z(S_M; s_1, -s_2, s_3, -s_4, \dots, (-1)^{m-1} s_m).$$

Protože podmnožina $\overline{Y^M}$ množiny Y^M je uzavřená vzhledem ke grupě S_M, každá orbita prvků z Y^M v grupě E^{S_M} je tvořena buď pouze injektivními zobrazeními, anebo pouze neinjektivními zobrazeními. Orbitami prvků z $\overline{Y^M}$ v grupě $\overline{E^{S_M}}$ jsou potom právě ty z orbit v grupě E^{S_M}, které jsou tvořeny injektivními zobrazeními.

Nyní se věnujme vztahu mezi orbitami prvků z Y^M v grupě E^{S_M} a orbitami prvků z Y^M v grupě E^{A_M}, kde A_M je podgrupa všech sudých permutací množiny M. Nechť nejprve $\mathcal{O}$ je orbita v E^{S_M} tvořená injektivními zobrazeními. Pak $\mathcal{O} = \{f \circ \sigma : \sigma \in S_M\}$ pro nějaké pevně zvolené injektivní zobrazení $f : M \to Y$.

Položme $\mathcal{O}_1 = \{f \circ \sigma : \sigma \in S_M$ je sudá permutace$\}$ a $\mathcal{O}_2 = \{f \circ \sigma : \sigma \in S_M$ je lichá permutace$\}$. Pak ovšem $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. Ukážeme dále, že $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Kdyby existovalo injektivní zobrazení $g \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, bylo by toto zobrazení tvaru $f \circ \sigma$ pro nějakou sudou permutaci σ a zároveň tvaru $f \circ \tau$ pro nějakou lichou permutaci τ. Takže bychom měli rovnost $f \circ \sigma = f \circ \tau$, odkud by vzhledem k tomu, že f je injektivní zobrazení, vyplynula rovnost $\sigma = \tau$, což není možné. Takže skutečně $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Dále očividně $\mathcal{O}_1$ je orbitou prvku f v grupě E^{A_M}. Přesvědčíme se, že také $\mathcal{O}_2$ je orbitou nějakého prvku v grupě E^{A_M}. Zvolíme-li pevně nějakou lichou permutaci τ, pak množina permutací tvaru $\{\tau \circ \sigma : \sigma \in A_M\}$ je právě množinou všech lichých permutací množiny M. Takže pak $\mathcal{O}_2 = \{f \circ \tau \circ \sigma : \sigma \in A_M\}$, čili $\mathcal{O}_2$ je orbitou prvku $f \circ \tau$ v grupě E^{A_M}. Celkem tedy vidíme, že každá orbita $\mathcal{O}$ v E^{S_M}, která je tvořena injektivními zobrazeními, je disjunktním sjednocením dvou orbit v E^{A_M}.

Nechť dále $\mathcal{O}$ je orbita v E^{S_M} tvořená neinjektivními zobrazeními. Pak $\mathcal{O} = \{f \circ \sigma : \sigma \in S_M\}$ pro nějaké pevně zvolené neinjektivní zobrazení $f : M \to Y$. Ukážeme, že pak ve skutečnosti $\mathcal{O} = \{f \circ \tau : \tau \in A_M\}$ pro toto neinjektivní zobrazení $f : M \to Y$, takže $\mathcal{O}$ je orbitou prvku f v grupě E^{A_M}. K tomu je třeba ukázat, že každé zobrazení tvaru $f \circ \sigma$, kde $\sigma \in S_M$, lze vyjádřit také ve tvaru $f \circ \tau$ pro nějaké $\tau \in A_M$. Je-li $\sigma \in A_M$, není už co ukazovat. Nechť tedy $\sigma \notin A_M$.

Pak, poněvadž zobrazení f není injektivní, existují vzájemně různé prvky $a, b \in M$ takové, že $f(a) = f(b)$. Označíme-li symbolem ϑ transpozici $(a\,b)$, pak ovšem platí, že $f \circ \vartheta = f$, takže $f \circ \sigma = f \circ \vartheta \circ \sigma$, přičemž ale $\vartheta \circ \sigma \in A_M$.

Zjistili jsme tak, že každá orbita v grupě E^{S_M} tvořená injektivními zobrazeními se rozpadá na dvě orbity v grupě E^{A_M} a že každá orbita v grupě E^{S_M} tvořená neinjektivními zobrazeními je sama orbitou v grupě E^{A_M}. Pokud jde tedy o orbity tvořené neinjektivními zobrazeními, nezáleží na tom, zda je uvažujeme v grupě E^{S_M} nebo E^{A_M}.

Označili jsme symbolem $\mathfrak{M}_{Y^M, A_M}$ množinu všech orbit libovolných zobrazení $f : M \to Y$ v grupě E^{A_M}, symbolem $\mathfrak{M}_{\overline{Y^M}, A_M}$ množinu všech orbit injektivních zobrazení $f : M \to Y$ v grupě $\overline{E^{A_M}}$, symbolem $\mathfrak{M}_{Y^M, S_M}$ množinu všech orbit libovolných zobrazení $f : M \to Y$ v grupě E^{S_M} a symbolem $\mathfrak{M}_{\overline{Y^M}, S_M}$ množinu všech orbit injektivních zobrazení $f : M \to Y$ v grupě $\overline{E^{S_M}}$. Označme ještě symbolem $\mathfrak{M}^-$ množinu všech orbit neinjektivních zobrazení $f : M \to Y$, ať už v grupě E^{A_M} nebo v grupě E^{S_M}. Pak $\mathfrak{M}_{Y^M, A_M} = \mathfrak{M}_{\overline{Y^M}, A_M} \cup \mathfrak{M}^-$ a $\mathfrak{M}_{Y^M, S_M} = \mathfrak{M}_{\overline{Y^M}, S_M} \cup \mathfrak{M}^-$ jsou disjunktní sjednocení množin. Pro enumerátory $\gamma(\overline{Y^M}, A_M)$ a $\gamma(\overline{Y^M}, S_M)$ pak podle předchozího zjištění platí

$$\gamma(\overline{Y^M}, A_M) = \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{\overline{Y^M}, A_M}} v(\mathcal{O}) = 2 \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{\overline{Y^M}, S_M}} v(\mathcal{O}) = 2\,\gamma(\overline{Y^M}, S_M).$$

Odtud pro enumerátory $\gamma(Y^M, A_M)$ a $\gamma(Y^M, S_M)$ vychází

$$\begin{aligned}
\gamma(Y^M, A_M) &= \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{Y^M, A_M}} v(\mathcal{O}) = \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{\overline{Y^M}, A_M}} v(\mathcal{O}) + \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}^-} v(\mathcal{O}) \\
&= 2 \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{\overline{Y^M}, S_M}} v(\mathcal{O}) + \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}^-} v(\mathcal{O}) \\
&= \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{\overline{Y^M}, S_M}} v(\mathcal{O}) + \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{\overline{Y^M}, S_M}} v(\mathcal{O}) + \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}^-} v(\mathcal{O}) \\
&= \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{\overline{Y^M}, S_M}} v(\mathcal{O}) + \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{Y^M, S_M}} v(\mathcal{O}) \\
&= \gamma(\overline{Y^M}, S_M) + \gamma(Y^M, S_M).
\end{aligned}$$

Takže dostáváme

$$\gamma(\overline{Y^M}, S_M) = \gamma(Y^M, A_M) - \gamma(Y^M, S_M).$$

Podle Pólyovy věty pro libovolná zobrazení platí, že

$$\gamma(Y^M, A_M) = Z(A_M; s_1, s_2, \ldots, s_m) \quad \text{a}$$

$$\gamma(Y^M, S_M) = Z(S_M; s_1, s_2, \ldots, s_m).$$

Dále z dřívějška víme, že

$$Z(A_M) = Z(S_M; t_1, t_2, \ldots, t_m) + Z(S_M; t_1, -t_2, t_3, -t_4, \ldots, (-1)^{m-1} t_m),$$

takže dostáváme

$$\begin{aligned} Z(A_M; & s_1, s_2, \ldots, s_m) \\ & = Z(S_M; s_1, s_2, \ldots, s_m) + Z(S_M; s_1, -s_2, s_3, -s_4, \ldots, (-1)^{m-1} s_m). \end{aligned}$$

To je ale hodnota enumerátoru $\gamma(Y^M, A_M)$. Dosazením takto nalezených hodnot enumerátorů $\gamma(Y^M, A_M)$ a $\gamma(Y^M, S_M)$ do výše uvedeného vyjádření enumerátoru $\gamma(\overline{Y^M}, S_M)$ nakonec po odečtení obdržíme

$$\gamma(\overline{Y^M}, S_M) = Z(S_M; s_1, -s_2, s_3, -s_4, \ldots, (-1)^{m-1} s_m),$$

což bylo tředa dokázat.

Konečně určíme enumerátor $\gamma(\overline{Y^M}, H)$ pro libovolnou podgrupu H grupy S_M. K tomu účelu předešleme následující pozorování. Uvažujme libovolnou orbitu $\mathcal{O}$ nějakého injektivního zobrazení $f : M \to Y$ v grupě $\overline{E^{S_M}}$. Pak $f(M)$ je m-prvková podmnožina množiny Y. Je-li $g : M \to Y$ nějaké jiné zobrazení v orbitě $\mathcal{O}$, pak máme $g = f \circ \sigma$ pro nějakou permutaci σ množiny M. Odtud pak plyne, že $g(M) = f(\sigma(M)) = f(M)$. Je-li naopak $h : M \to Y$ jakékoliv injektivní zobrazení takové, že $h(M) = f(M)$, pak $f^{-1}(h(M)) = M$, kde $f^{-1} : f(M) \to M$ je inverzní zobrazení k zobrazení f. Takže $f^{-1} \circ h$ je permutace množiny M a $h = f \circ f^{-1} \circ h$, odkud plyne, že i zobrazení h náleží do orbity $\mathcal{O}$. Je tedy orbita $\mathcal{O}$ množinou všech těch injektivních zobrazení $g : M \to Y$, která splňují $g(M) = f(M)$. Označme symbolem $Y_{\mathcal{O}}$ dotyčnou m-prvkovou podmnožinu $f(M)$ množiny Y. Je tedy orbita $\mathcal{O}$ množinou všech injektivních zobrazení $f : M \to Y_{\mathcal{O}}$. Orbity v grupě $\overline{E^{S_M}}$ tak vzájemně jednoznačně odpovídají m-prvkovým podmnožinám množiny Y.

Je-li nyní H podgrupa grupy S_M, je grupa $\overline{E^H}$ podgrupou grupy $\overline{E^{S_M}}$. Každá orbita $\mathcal{O}$ v grupě $\overline{E^{S_M}}$ je proto disjunktním sjednocením nějakých orbit v grupě $\overline{E^H}$. Chystáme se určit počet těchto sjednocovaných orbit. Všimněme si, že orbita $\mathcal{O}$ je uzavřenou podmnožinou množiny Y^M vzhledem k podgrupě H. Proto grupa H indukuje permutační grupu, označme ji symbolem $\widetilde{E^H}^{\mathcal{O}}$, na orbitě $\mathcal{O}$. Orbity v této grupě $\widetilde{E^H}^{\mathcal{O}}$ jsou pak právě těmi orbitami v grupě $\overline{E^H}$, z nichž se skládá orbita $\mathcal{O}$.

Podle důsledku Pólyovy-de Bruijnovy věty je počet těchto orbit roven číslu

$$|\mathfrak{M}_{\mathcal{O},H}| = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} |\{f \in \mathcal{O} : f \circ \sigma = f\}|.$$

Je-li však permutace $\sigma \in H$ různá od identity, pak žádné injektivní zobrazení $f : M \to Y_{\mathcal{O}}$ podmínku $f \circ \sigma = f$ nesplňuje, takže příslušný sčítanec je roven nule. Je-li permutace σ identitou, pak podmínku $f \circ \sigma = f$ splňují všechna injektivní zobrazení $f : M \to Y_{\mathcal{O}}$, a těchto zobrazení je celkem $m!$. Počet orbit v grupě $\widetilde{E^H}^{\mathcal{O}}$ je tedy roven číslu $|\mathfrak{M}_{\mathcal{O},H}| = \frac{m!}{|H|}$. Zjistili jsme tak, že každou orbitu $\mathcal{O}$ v grupě $\overline{E^{S_M}}$ tvoří $\frac{m!}{|H|}$ orbit v grupě $\overline{E^H}$. Z tohoto důvodu platí pro příslušné enumerátory rovnost

$$\gamma(\overline{Y^M}, H) = \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{\overline{Y^M},H}} v(\mathcal{O}) = \frac{m!}{|H|} \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{\overline{Y^M},S_M}} v(\mathcal{O}) = \frac{m!}{|H|} \gamma(\overline{Y^M}, S_M).$$

Odtud a z předchozí části tohoto důkazu tak plyne, že

$$\gamma(\overline{Y^M}, H) = \frac{m!}{|H|} Z(S_M; s_1, -s_2, s_3, -s_4, \ldots, (-1)^{m-1} s_m),$$

což jsme měli ukázat. $\square$

Vraťme se nyní k váhové funkci w na množině Y všech obrazců, kterou jsme zavedli v paragrafu věnovaném Pólyově větě pro libovolná zobrazení. Pro každé nezáporné celé číslo n jsme symbolem d_n označili počet obrazců $\wp \in Y$ váhy n a dále jsme označili

$$d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

generující řadu pro obrazce dané váhy.

Oproti onomu dřívějšímu paragrafu se nyní věnujme pouze injektivním zobrazením $f : M \to Y$. Stejným způsobem jako v tom již zmíněném paragrafu definujme váhu $w(f)$ takového zobrazení f. Je-li H libovolná podgrupa grupy S_M, můžeme spolu s ní uvažovat orbity injektivních zobrazení $f : M \to Y$ v grupě $\overline{E^H}$, to jest v grupě indukované podgrupou H na množině $\overline{Y^M}$ všech injektivních zobrazení. Tyto orbity zase nazýváme konfiguracemi. Stejně jako dříve můžeme pro každou orbitu $\mathcal{O}$ v grupě $\overline{E^H}$ korektně definovat její váhu $w(\mathcal{O})$ jako váhu $w(f)$ pro některý (kterýkoliv) prvek f orbity $\mathcal{O}$.

Úvahy uvedené ve zmíněném dřívějším paragrafu dále ukazují, že pro každé nezáporné celé číslo n je počet orbit injektivních zobrazení $f : M \to Y$ v grupě $\overline{E^H}$ dané váhy n zase konečný. Tedy počet konfigurací dané váhy n je konečný. Označme symbolem $\overline{D}_n$ počet nynějších konfigurací $\mathcal{O}$ váhy n, to jest počet orbit $\mathcal{O}$ váhy n v grupě $\overline{E^H}$.

Označme dále

$$\overline{D}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{D}_n x^n$$

generující řadu pro nynější konfigurace dané váhy.

Nakonec, stejně jako v již zmíněném dřívějším paragrafu, pro každý obrazec $\wp \in Y$ dosaďme mocninu $x^{w(\wp)}$ za proměnnou $x_\wp$ do členu $v(\mathcal{O})$ pro každou konfiguraci $\mathcal{O}$. Tímto dosazením do enumerátoru $\gamma(\overline{Y^M}, H)$ tentokrát dostaneme řadu $\overline{D}(x)$. Stejným způsobem dosaďme do sum mocnin proměnných $s_1, s_2, \ldots$. Tím dostaneme řady $d(x), d(x^2), \ldots$. To ale tentokrát znamená, že tímto dosazením dostaneme z předchozí věty následující speciální podobu Pólyovy věty pro injektivní zobrazení:

Věta.

Platí rovnost mocninných řad

$$\overline{D}(x) = \frac{m!}{|H|} Z(S_M; d(x), -d(x^2), d(x^3), -d(x^4), \ldots, (-1)^{m-1} d(x^m)). \qquad \square$$