Počet navzájem neizomorfních stromů

Směřujeme k nalezení počtu navzájem neizomorfních stromů s daným počtem vrcholů. Budeme k tomu potřebovat některá speciální tvrzení o stromech.

Tvrzení.

Nechť $T = (V(T), E(T))$ je strom. Nechť T_0 je podstrom ve stromě T takový, že pro každý automorfismus σ stromu T je splněna podmínka:

$$((x \in V(T_0) \ \& \ \sigma(x) \neq x) \Longrightarrow \sigma(x) \notin V(T_0)). \qquad (*)$$

Pak platí následující sdělení. Nechť $p \in V(T) - V(T_0)$, $q \in V(T_0)$ jsou takové vrcholy, že $\{p, q\} \in E(T)$, nechť σ je nějaký automorfismus stromu T, nechť $\sigma(p) = p'$, $\sigma(q) = q'$ a nechť je splněno $p' \in V(T_0)$. Potom platí buďto $\{p, q\} = \{p', q'\}$, anebo $q' = q$.

Důkaz.

Jestliže platí $\{p, q\} = \{p', q'\}$, pak tvrzení platí. Předpokládejme tedy dále, že $\{p, q\} \neq \{p', q'\}$. Ukážeme nejprve, že v tom případě platí $\{p', q'\} \in E(T_0)$. Postupujeme sporem. Předpokládejme tedy, že $\{p', q'\} \notin E(T_0)$.

Poněvadž $\{p, q\} \in E(T)$ a $\sigma(p) = p'$, $\sigma(q) = q'$, máme $\{p', q'\} \in E(T)$, protože σ je automorfismus stromu T.

Odstraněním hrany $\{p, q\}$ z množiny $E(T)$ se strom T rozpadne na dva podstromy. Označme T_p ten z těchto podstromů, který obsahuje vrchol p, a označme T_q druhý z těchto podstromů, který obsahuje vrchol q. Podobně odstraněním hrany $\{p', q'\}$ z množiny $E(T)$ se strom T rozpadne na dva podstromy $T_{p'}$ a $T_{q'}$. Z toho, že $p \notin V(T_0)$ a $q \in V(T_0)$, vyplývá, že $\{p, q\} \notin E(T_0)$ a že tedy podstrom T_0 stromu T je celý obsažen v podstromě T_q, takže zejména platí $V(T_0) \subseteq V(T_q)$.

Protože $\{p, q\} \neq \{p', q'\}$, musí pro hranu $\{p', q'\}$ nastat právě jedna ze dvou možností: buď $\{p', q'\} \in E(T_p)$, nebo $\{p', q'\} \in E(T_q)$. Poněvadž ale $p' \in V(T_0)$ a viděli jsme, že $V(T_0) \subseteq V(T_q)$, máme $p' \in V(T_q)$, a tedy musí nastat druhá možnost, čili $\{p', q'\} \in E(T_q)$.

Odstraněním hrany $\{p', q'\}$ z množiny $E(T_q)$ se strom T_q dále rozpadne na dva podstromy. Označme $T_{qp'}$ ten z těchto podstromů, který obsahuje vrchol p', a označme $T_{qq'}$ druhý z těchto podstromů, který obsahuje vrchol q'. Pak nastane jedna ze dvou možností: buď $q \in V(T_{qp'})$, nebo $q \in V(T_{qq'})$. Pokud by ale platilo $q \in V(T_{qq'})$, musela by jediná cesta ve stromě T_q vedoucí z vrcholu p' do vrcholu q procházet hranou $\{p', q'\}$.

Poněvadž ale $q \in V(T_0)$ a $p' \in V(T_0)$, byla by tato cesta současně jedinou cestou v podstromě T_0 stromu T_q vedoucí z vrcholu p' do vrcholu q. Musela by tedy hrana $\{p', q'\}$ ležet v $E(T_0)$. To ale odporuje našemu současnému předpokladu, že $\{p', q'\} \notin E(T_0)$. Musí tedy nastat první z uvedených dvou možností, tedy $q \in V(T_{qp'})$. To ale znamená, že spojením podstromů T_p a $T_{qp'}$ hranou $\{p, q\}$ vznikne podstrom $T_{p'}$, a tedy že podstrom $T_{qq'}$ je roven podstromu $T_{q'}$. Je tedy podstrom $T_{q'}$ obsažen v podstromě T_q.

Ovšem podstrom $T_{q'}$ není roven celému podstromu T_q, neboť samozřejmě $p' \notin V(T_{q'})$, zatímco $\{p', q'\} \in E(T_q)$, a tedy $p' \in V(T_q)$. Je tedy množina vrcholů $V(T_{q'})$ vlastní podmnožinou množiny $V(T_q)$. Ale zobrazení σ je automorfismem stromu T a platí $\sigma(p) = p'$ a $\sigma(q) = q'$. Odtud plyne že σ zobrazuje bijektivně podstrom T_q na podstrom $T_{q'}$. To je však ve sporu s předchozím zjištěním, podle něhož podmnožina vrcholů $V(T_{q'})$ není rovna celé množině $V(T_q)$.

Nalezený spor tak potvrzuje naše počáteční tvrzení, že $\{p', q'\} \in E(T_0)$. Odtud plyne, že $q' \in V(T_0)$, čili $\sigma(q) \in V(T_0)$. Avšak také $q \in V(T_0)$. Vzhledem k tomu, že podstrom T_0 splňuje podmínku $(*)$, nutně musí platit $\sigma(q) = q$, to jest platí rovnost $q' = q$. $\square$

Řekneme, že hrana $\{a, b\}$ ve stromě T je symetrická, jestliže existuje automorfismus σ stromu T takový, že $\sigma(a) = b$ a $\sigma(b) = a$. Strom T může mít nanejvýš jednu symetrickou hranu. Je-li totiž $\{a, b\}$ symetrická hrana a je-li σ příslušný automorfismus stromu T, pak odstraněním hrany $\{a, b\}$ se strom T rozpadne na dva podstromy T_a a T_b, které musí být navzájem izomorfní, jelikož automorfismus σ převádí podstrom T_a na T_b a podstrom T_b na T_a. Musí tedy mít oba podstromy T_a i T_b stejný počet vrcholů. Žádná jiná hrana $\{a', b'\}$ stromu T pak nemůže analogickou podmínku splnit, neboť taková hrana $\{a', b'\}$ je buď hranou podstromu T_a nebo podstromu T_b.

Tvrzení.

Nechť T je strom a nechť T_0 je maximální podstrom stromu T splňující podmínku $(*)$ z předchozího tvrzení. Potom pro každý vrchol $c \in V(T)$ existuje automorfismus σ stromu T takový, že $\sigma(c) \in V(T_0)$. Dále pro každou nesymetrickou hranu $\{c, d\} \in E(T)$ existuje automorfismus σ stromu T takový, že $\sigma(\{c, d\}) \in E(T_0)$.

Důkaz.

Jestliže už $c \in V(T_0)$, pak za σ lze vzít identitu a první část tvrzení platí. Nechť tedy dále $c \in V(T) - V(T_0)$. Předpokládejme nejprve, že tento vrchol c sousedí ve stromě T hranou s některým vrcholem $d \in V(T_0)$.

Pak přidáním vrcholu c a hrany $\{c, d\}$ k podstromu T_0 vznikne větší podstrom, který označíme T_0'. Protože T_0 byl maximální podstrom ve stromě T splňující podmínku $(*)$, podstrom T_0' už podmínku $(*)$ nesplňuje. To znamená, že existuje automorfismus σ stromu T a vrchol $x \in V(T_0')$ takový, že $\sigma(x) \neq x$ a přitom $\sigma(x) \in V(T_0')$. Jestliže nyní $x = c$, je σ automorfismem, pro nějž $\sigma(c) \in V(T_0')$ a zároveň $\sigma(c) \neq c$, takže $\sigma(c) \in V(T_0)$, a tedy σ je hledaným automorfismem. Jestliže však $x \neq c$, pak $x \in V(T_0)$ a musí platit $\sigma(x) = c$, neboť jinak bychom měli $\sigma(x) \in V(T_0)$, takže už podstrom T_0 by nesplňoval podmínku $(*)$. To ale má za následek, že $x = \sigma^{-1}(c)$, takže σ^{-1} je teď hledaným automorfismem.

Předpokládejme tedy dále, že vrchol c nesousedí ve stromě T s žádným vrcholem z $V(T_0)$. Nechť $c = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = d$ je nějaká cesta ve stromě T z vrcholu c, který ovšem nenáleží do $V(T_0)$, do nějakého vrcholu $d \in V(T_0)$. Postupujeme dále indukcí vzhledem k délce k takové cesty. Vrchol $c = x_0$ podle předpokladu nepatří do $V(T_0)$ a nesousedí s žádným vrcholem z $V(T_0)$, zatímco vrchol x_{k-1} sousedí s vrcholem $x_k = d$ patřícím do $V(T_0)$. To nutně znamená, že $k > 1$. Podle předchozího odstavce pak existuje automorfismus σ stromu T takový, že $\sigma(x_{k-1}) \in V(T_0)$. Jestliže $\sigma(c) \in V(T_0)$, pak je σ hledaným automorfismem. Nechť tedy dále $\sigma(c) \notin V(T_0)$, to jest $\sigma(x_0) \notin V(T_0)$. Poněvadž σ je automorfismus stromu T, můžeme dále uvažovat cestu $\sigma(x_0), \sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_{k-1})$ ve stromě T.

Tato cesta má délku $k-1$ a platí na ní $\sigma(x_0) \notin V(T_0)$, zatímco $\sigma(x_{k-1}) \in V(T_0)$. Můžeme tedy na tuto poslední cestu aplikovat indukční předpoklad, podle něhož existuje automorfismus τ stromu T takový, že $\tau(\sigma(x_0)) \in V(T_0)$, to jest $\tau(\sigma(c)) \in V(T_0)$. V tomto případě je tedy $\tau \circ \sigma$ hledaným automorfismem.

Dokažme druhou část našeho tvrzení. Nechť $\{c, d\}$ je nesymetrickou hranou stromu T. Jestliže $\{c, d\} \in E(T_0)$, pak za σ lze vzít identitu a druhá část tvrzení platí. Nechť tedy dále $\{c, d\} \in E(T) - E(T_0)$. Podle první části tvrzení existuje automorfismus σ stromu T takový, že $\sigma(c) \in V(T_0)$. Jestliže platí též, že $\sigma(d) \in V(T_0)$, pak σ je automorfismem, pro který platí $\sigma(\{c, d\}) \in E(T_0)$. Předpokládejme tedy dále, že $\sigma(d) \notin V(T_0)$. Opět podle první části tvrzení existuje automorfismus τ stromu T takový, že $\tau(\sigma(d)) \in V(T_0)$. Protože hrana $\{c, d\}$ byla nesymetrickou hranou stromu T a σ je automorfismus stromu T, je také hrana $\{\sigma(c), \sigma(d)\}$ nesymetrickou hranou stromu T. Z tohoto důvodu nemůže platit rovnost $\tau(\{\sigma(c), \sigma(d)\}) = \{\sigma(c), \sigma(d)\}$, neboť v opačném případě bychom nutně měli $\tau(\sigma(c)) = \sigma(d)$ a $\tau(\sigma(d)) = \sigma(c)$, protože $\sigma(d) \notin V(T_0)$, zatímco $\tau(\sigma(d)) \in V(T_0)$, takže $\tau(\sigma(d)) \neq \sigma(d)$. Byla by tedy hrana $\{\sigma(c), \sigma(d)\}$ symetrickou hranou stromu T, což jsme vyloučili. Nyní můžeme aplikovat předcházející tvrzení z tohoto paragrafu na hranu $\{\sigma(d), \sigma(c)\}$ stromu T a automorfismus τ, neboť $\sigma(d) \notin V(T_0)$, $\sigma(c) \in V(T_0)$ a $\tau(\sigma(d)) \in V(T_0)$.

Vzhledem k předchozímu závěru v tomto odstavci důkazu ale může být jmenované předcházející tvrzení z tohoto paragrafu splněno jedině tak, že $\tau(\sigma(c)) = \sigma(c)$. Pak ovšem, poněvadž $\sigma(c) \in V(T_0)$, máme $\tau(\sigma(c)) \in V(T_0)$. Také máme $\tau(\sigma(d)) \in V(T_0)$. Odtud plyne, že $\tau(\sigma(\{c, d\})) \in E(T_0)$, takže $\tau \circ \sigma$ je nyní hledaný automorfismus. □

Buď nyní T strom. Označme symbolem $\mathrm{Aut}(T)$ grupu všech automorfismů stromu T. Grupa $\mathrm{Aut}(T)$ indukuje grupu permutací na množině $V(T)$ všech vrcholů stromu T. Označme v_T počet orbit vrcholů z $V(T)$ v této permutační grupě. Grupa $\mathrm{Aut}(T)$ rovněž indukuje grupu permutací na množině $E(T)$ všech hran stromu T. Označme e_T počet orbit hran z $E(T)$ v této permutační grupě. Dále označme s_T počet symetrických hran stromu T (takže $s_T = 1$ nebo $s_T = 0$ podle toho, zda strom T má nebo nemá symetrickou hranu). Pro tyto hodnoty platí následující věta.

Věta.

V libovolném stromě T platí rovnost

$$v_T = e_T - s_T + 1.$$

Důkaz.

Buď opět T_0 maximální podstrom stromu T splňující podmínku $(*)$ z předminulého tvrzení. Podmínka $(*)$ zaručuje, že množina $V(T_0)$ obsahuje z každé orbity vrcholů z $V(T)$ v grupě $\mathrm{Aut}(T)$ nejvýše jeden vrchol. Podmínka $(*)$ rovněž zaručuje, že množina $E(T_0)$ obsahuje z každé orbity hran z $E(T)$ v grupě $\mathrm{Aut}(T)$ nejvýše jednu hranu. Tato podmínka také zaručuje, že množina $E(T_0)$ neobsahuje symetrickou hranu stromu T, má-li strom T nějakou. Oproti tomu minulé tvrzení zase zaručuje, že množina $V(T_0)$ z každé orbity vrcholů nějaký vrchol obsahuje a také že množina $E(T_0)$ z každé orbity hran nějakou hranu obsahuje, vyjma orbitu tvořenou symetrickou hranou stromu T, má-li strom T nějakou. Počet vrcholů podstromu T_0 je tedy roven právě číslu v_T a počet hran podstromu T_0 je roven právě číslu $e_T - s_T$. Jinak řečeno, máme rovnosti $|V(T_0)| = v_T$ a $|E(T_0)| = e_T - s_T$. Ovšem T_0 je strom, takže platí rovnost $|V(T_0)| = |E(T_0)| + 1$. Dostáváme tak rovnost $v_T = e_T - s_T + 1$, což je tvrzení naší věty. □

V důkazu následující věty budeme potřebovat ještě pojem hranově kořenového stromu. Tak nazýváme strom T, v němž je označena jedna nesymetrická hrana jako kořenová. Dva hranově kořenové stromy T a $\overline{T}$ s kořenovými hranami $\{a, b\}$ a $\{c, d\}$ nazveme izomorfní, jestliže existuje izomorfismus $\varphi : T \to \overline{T}$ takový, že $\varphi(\{a, b\}) = \{c, d\}$.

Připomeňme, že jsme pro každé kladné celé číslo n označili $\bar{u}_n$ počet navzájem neizomorfních kořenových stromů majících n vrcholů a že jsme se zabývali generující řadou $\bar{u}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n x^n$. Označme dále u_n počet navzájem neizomorfních stromů majících n vrcholů a uvažujme generující řadu $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$. Vyjádříme nyní řadu $u(x)$ pomocí řady $\bar{u}(x)$. Platí následující věta.

Věta.

Pro generující řady $u(x)$ a $\bar{u}(x)$ platí rovnost

$$u(x) = \bar{u}(x) - \frac{1}{2}\left((\bar{u}(x))^2 - \bar{u}(x^2)\right).$$

Důkaz.

Vytvoříme-li ze stromu T dva kořenové stromy tím způsobem, že za kořeny zvolíme dva vrcholy p a q stromu T, budou takto vzniklé kořenové stromy navzájem izomorfní, právě když bude existovat automorfismus σ stromu T takový, že $\sigma(p) = q$, to jest právě když budou oba vrcholy p a q náležet téže orbitě v grupě $\mathrm{Aut}(T)$. To znamená, že ze stromu T lze zvolením jednoho vrcholu za kořen vytvořit právě v_T navzájem neizomorfních kořenových stromů.

Vytvoříme-li podobně ze stromu T dva hranově kořenové stromy tím způsobem, že za kořenové hrany zvolíme dvě nesymetrické hrany $\{a, b\}$ a $\{c, d\}$ stromu T, budou takto vzniklé hranově kořenové stromy navzájem izomorfní, právě když bude existovat automorfismus σ stromu T takový, že $\sigma(\{a, b\}) = \{c, d\}$, to jest právě když budou obě hrany $\{a, b\}$ a $\{c, d\}$ náležet téže orbitě v grupě $\mathrm{Aut}(T)$. To znamená, že ze stromu T lze zvolením jedné nesymetrické hrany za kořenovou hranu vytvořit právě $e_T - s_T$ navzájem neizomorfních hranově kořenových stromů.

Označme ℓ_n počet navzájem neizomorfních hranově kořenových stromů majících n vrcholů (klademe $\ell_1 = 0$) a uvažme příslušnou generující řadu $\ell(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n x^n$. Označme dále $\mathcal{T}_n$ množinu stromů obsahující z každé třídy navzájem izomorfních stromů majících n vrcholů právě jeden strom. Pak podle závěrů učiněných v předchozích dvou odstavcích platí

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_n} v_T = \bar{u}_n \quad \text{a} \quad \sum_{T \in \mathcal{T}_n} (e_T - s_T) = \ell_n.$$

Sečtením rovností $v_T - (e_T - s_T) = 1$ pocházejících z předchozí věty přes všechny stromy $T \in \mathcal{T}_n$ dostaneme

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_n} v_T - \sum_{T \in \mathcal{T}_n} (e_T - s_T) = \sum_{T \in \mathcal{T}_n} 1 = u_n,$$

a tedy

$$\bar{u}_n - \ell_n = u_n.$$

Tato rovnost platí pro všechna kladná celá čísla n, takže dostáváme rovnost zahrnující generující řady

$$\bar{u}(x) - \ell(x) = u(x).$$

Chystáme se použít Pólyovu větu pro injektivní zobrazení, abychom určili řadu $\ell(x)$. Množinou M bude dvouprvková množina $\{1, 2\}$. Množinou obrazců Y bude množina, která z každé třídy navzájem izomorfních kořenových stromů obsahuje právě jeden exemplář. Váhovou funkci w definujeme jako funkci udávající pro každý kořenový strom $T \in Y$ počet vrcholů stromu T. Takže řada $\bar{u}(x)$ bude nyní řadou $d(x)$ z Pólyovy věty. Každé injektivní zobrazení $f : M \to Y$ zadává hranově kořenový strom, který dostaneme, když kořeny stromů $f(1)$ a $f(2)$ spojíme hranou a prohlásíme tuto novou hranu za kořenovou hranu takto vzniklého stromu. Fakt, že zobrazení f je injektivní, znamená, že tato nová hrana nebude symetrická. Dvě zobrazení $f, \bar{f} : M \to Y$ takto zadávají navzájem izomorfní hranově kořenové stromy právě tehdy, když f a $\bar{f}$ náležejí do téže orbity grupy $\overline{E^{S_M}}$. To znamená, že řada $\ell(x)$ bude nyní řadou $\overline{D}(x)$ z Pólyovy věty. Připomeňme ještě, že $M = \{1, 2\}$ a že tedy S_M je dvouprvková grupa, totiž grupa všech permutací dvouprvkové množiny. Podle Pólyovy věty pro injektivní zobrazení tedy máme rovnost

$$\ell(x) = Z(S_M; \bar{u}(x), -\bar{u}(x^2)).$$

Přitom cyklový index grupy S_M všech permutací dvouprvkové množiny M je roven

$$Z(S_M; t_1, t_2) = \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2).$$

Dosazením do předchozí rovnosti dostaneme

$$\ell(x) = \frac{1}{2}\big((\bar{u}(x))^2 - \bar{u}(x^2)\big).$$

Konečně odtud dosazením za $\ell(x)$ do rovnosti $\bar{u}(x) - \ell(x) = u(x)$, kterou jsme odvodili výše, vyjde

$$u(x) = \bar{u}(x) - \frac{1}{2}\big((\bar{u}(x))^2 - \bar{u}(x^2)\big),$$

což je tvrzení věty. $\square$