Invariance konfigurací vzhledem k permutacím obrazců

Buď M neprázdná konečná množina mající m prvků a buď Y neprázdná konečná množina mající η prvků. Prvky množiny Y nazýváme obrazci. Buď H nějaká podgrupa grupy S_M všech permutací množiny M. Mějme množinu Y^M všech zobrazení $M \to Y$. Buď dále $\mathcal{F}$ nějaká podmnožina množiny Y^M uzavřená vzhledem k podgrupě H. Viděli jsme, že podgrupa H grupy S_M indukuje podgrupu E^H grupy $S_{\mathcal{F}}$. Připomeňme, že pro každé zobrazení $f \in \mathcal{F}$ značíme fH orbitu prvku f v podgrupě E^H a že platí $fH = \{f \circ \sigma : \sigma \in H\}$. Orbity tvaru fH jsme nazývali konfiguracemi. Konečně buď τ nějaká permutace množiny obrazců Y. Taková permutace τ indukuje permutaci množiny Y^M danou předpisem $g \mapsto \tau \circ g$ pro každé zobrazení $g : M \to Y$. Označme dále pro každé zobrazení $f \in \mathcal{F}$ symbolem $\tau(fH)$ množinu zobrazení $\{\tau \circ f \circ \sigma : \sigma \in H\}$. Za této situace klademe

$$\mathcal{F}_\tau = \{f \in \mathcal{F} : \tau(fH) = fH\}.$$

Takže $\mathcal{F}_\tau$ je množina všech těch zobrazení $f \in \mathcal{F}$, pro něž orbita fH je invariantní vzhledem k permutaci τ. Tvrdíme, že podmnožina $\mathcal{F}_\tau$ je uzavřená vzhledem k podgrupě H. Skutečně nechť $f \in \mathcal{F}_\tau$, takže $\tau(fH) = fH$, a nechť $\rho \in H$. Chceme ukázat, že pak $f \circ \rho \in \mathcal{F}_\tau$, což znamená, že orbita $(f \circ \rho)H$ má být invariantní vzhledem k permutaci τ. Ale máme

$$(f \circ \rho)H = \{f \circ \rho \circ \sigma : \sigma \in H\} = \{f \circ \sigma : \sigma \in H\} = fH,$$

poněvadž H je podgrupa grupy S_M a $\rho \in H$. Takže dostáváme rovnost orbit $(f \circ \rho)H = fH$. Ovšem orbita fH je podle předpokladu invariantní vzhledem k permutaci τ. To dokazuje naše tvrzení.

Můžeme se tedy dále starat o enumerátor $\gamma(\mathcal{F}_\tau, H)$. Bude ale vhodné poněkud modifikovat definici tohoto enumerátoru. Buď π nějaký rozklad množiny obrazců Y. Řekneme, že tento tozklad π je kompatibilní s permutací τ množiny obrazců Y, jestliže pro každý obrazec $\wp \in Y$ platí, že prvky $\wp$ a $\tau(\wp)$ leží ve stejné třídě rozkladu π. To znamená, že třídy rozkladu π jsou invariantní vzhledem k permutaci τ. Připomeňme, že permutace τ se rozpadá na součin několika nezávislých cyklů (včetně cyklů délky 1) a že prostřednictvím těchto cyklů permutace τ indukuje rozklad množiny Y, který jsme označili $r(\tau)$. Třídami rozkladu $r(\tau)$ jsou množiny prvků jednotlivých nezávislých cyklů, na něž se rozpadá permutace τ. Potom rozklad π množiny Y je kompatibilní s permutací τ množiny Y, jestliže každá třída rozkladu π je sjednocením několika tříd rozkladu $r(\tau)$, to jest jestliže rozklad $r(\tau)$ je zjemněním rozkladu π. Nyní každé třídě C rozkladu π přiřaďme proměnnou x_C a každému zobrazení $f \in \mathcal{F}_\tau$ (šířeji každému zobrazení $f \in \mathcal{F}$) přiřaďme člen, to jest součin proměnných, označený $v_\pi(f)$ a definovaný následovně. Označme ještě pro každý obrazec $\wp \in Y$ symbolem $[\wp]\pi$ třídu rozkladu π obsahující prvek $\wp$. Pak klademe:

$$v_\pi(f) = \prod_{a \in M} x_{[f(a)]\pi}.$$

Obdobným argumentem jako dříve se ukáže, že jsou-li f, g dvě zobrazení z podmnožiny $\mathcal{F}$ náležející téže orbitě grupy E^H, pak členy $v_\pi(f)$ a $v_\pi(g)$ příslušné těmto zobrazením jsou si rovny, to jest platí $v_\pi(f) = v_\pi(g)$. Můžeme tedy pro každou orbitu $\mathcal{O}$ v podgrupě E^H korektně definovat jí odpovídající člen $v_\pi(\mathcal{O})$ jako člen $v_\pi(f)$, kde f je některý (kterýkoliv) prvek orbity $\mathcal{O}$. Označme navíc symbolem $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}_\tau, H}$ množinu všech orbit prvků podmnožiny $\mathcal{F}_\tau$ v podgrupě E^H. V tomto kontextu definujeme enumerátor $\gamma_\pi(\mathcal{F}_\tau, H)$ následovně:

$$\gamma_\pi(\mathcal{F}_\tau, H) = \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{F}_\tau, H}} v_\pi(\mathcal{O}).$$

Podotkněme už jen, že nyní jsou obě množiny M i Y konečné, takže je konečná i množina $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}_\tau, H}$, a tedy výše uvedená suma bude obsahovat jenom konečný počet sčítanců. Má tedy smysl ptát se na počet konfigurací v množině $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}_\tau, H}$. Tento počet dostaneme dosazením hodnoty 1 za všechny proměnné do enumerátoru.

Pozastavme se ještě na malý okamžik u porovnání dřívějšího enumerátoru $\gamma(\mathcal{F}_\tau, H)$ a nynějšího enumerátoru $\gamma_\pi(\mathcal{F}_\tau, H)$ definovaného prostřednictvím rozkladu π množiny obrazců Y. Nyní jsme přiřazovali jednotlivé proměnné nikoliv jednotlivým obrazcům z Y, ale celým třídám rozkladu π množiny Y všech obrazců. Mohli jsme také přiřazovat jednotlivé proměnné přímo obrazcům z Y s tou výhradou, že obrazcům z téže třídy rozkladu π se přiřadí tatáž proměnná.

Z toho je patrno, že náš nynější enumerátor $\gamma_\pi(\mathcal{F}_\tau, H)$ vznikne z původního enumerátoru $\gamma(\mathcal{F}_\tau, H)$ nějakým ztotožněním některých proměnných. To také znamená, že i v nynějším kontextu platí odpovídající varianta dřívější Pólyovy-de Bruijnovy věty. Nyní jsme připraveni dokázat následující výsledek:

Věta.

Enumerátor $\gamma_\pi(\mathcal{F}_\tau, H)$ je dán formulí

$$\gamma_\pi(\mathcal{F}_\tau, H) = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} \Big(\sum_{f \in \mathcal{F},\, \tau \circ f = f \circ \sigma} v_\pi(f) \Big).$$

Poznámka.

Požadavek $f \in \mathcal{F}$, $\tau \circ f = f \circ \sigma$ ve vnitřní sumě znamená, že $\tau \circ f = f \circ \sigma \in fH$, takže $\tau(fH) \subseteq fH$, a tedy nutně $\tau(fH) = fH$. To ale říká, že ve skutečnosti $f \in \mathcal{F}_\tau$.

Důkaz.

Podle Pólyovy-de Bruijnovy věty máme

$$\gamma_\pi(\mathcal{F}_\tau, H) = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} \Big(\sum_{f \in \mathcal{F}_\tau,\, f \circ \sigma = f} v_\pi(f) \Big).$$

Přehozením pořadí sčítaní přejde toto vyjádření do tvaru

$$\gamma_\pi(\mathcal{F}_\tau, H) = \frac{1}{|H|} \sum_{f \in \mathcal{F}_\tau} \Big(\sum_{\sigma \in H,\, f \circ \sigma = f} v_\pi(f) \Big).$$

Pro každé zobrazení $f \in \mathcal{F}_\tau$ je počet sčítanců tvaru $v_\pi(f)$ ve vnitřní sumě poslední formule roven počtu těch permutací $\sigma \in H$, pro něž $f \circ \sigma = f$. Označme symbolem $H(f)$ množinu permutací $\{\sigma \in H : f \circ \sigma = f\}$. Pak $H(f)$ je podgrupa grupy H. Fakt, že $f \in \mathcal{F}_\tau$, znamená, že $\tau(fH) = fH$, a tedy $\tau \circ f \in fH$. Je tedy zobrazení $\tau \circ f$ tvaru $f \circ \rho$ pro nějakou permutaci $\rho \in H$. Nyní podmínka $\tau \circ f = f \circ \sigma$, to jest podmínka $f \circ \rho = f \circ \sigma$, platí právě tehdy, když platí podmínka $f \circ \sigma \circ \rho^{-1} = f$, to jest právě tehdy, když je splněno $\sigma \circ \rho^{-1} \in H(f)$. Poslední podmínka je ale ekvivalentní tomu, že permutace σ leží v pravé třídě grupy H podle její podgrupy $H(f)$ určené permutací ρ. Poněvadž $H(f)$ je podgrupa grupy H, každá pravá třída grupy H podle podgrupy $H(f)$ má týž počet prvků, jako má podgrupa $H(f)$ sama. Je tedy počet permutací σ splňujících podmínku $f \circ \sigma = f$ roven počtu permutací σ splňujících podmínku $\tau \circ f = f \circ \sigma$. Je tedy možno první z těchto dvou podmínek vyskytující se ve vnitřní sumě v poslední výše uvedené formuli nahradit druhou z těchto dvou podmínek. Dostáváme tak vyjádření

$$\gamma_\pi(\mathcal{F}_\tau, H) = \frac{1}{|H|} \sum_{f \in \mathcal{F}_\tau} \Big(\sum_{\sigma \in H,\, \tau \circ f = f \circ \sigma} v_\pi(f) \Big).$$

Zbývá přehodit zpět pořadí sčítání, abychom odtud dostali formuli

$$\gamma_\pi(\mathcal{F}_\tau, H) = \frac{1}{|H|}\sum_{\sigma\in H}\Bigg(\sum_{f\in\mathcal{F}_\tau,\,\tau\circ f=f\circ\sigma} v_\pi(f)\Bigg).$$

K úplnému dokončení důkazu pak už zbývá jen se odvolat na shora uvedenou poznámku. □

Věnujme se nyní speciálnímu případu, kdy podmnožina $\mathcal{F}$ množiny Y^M je rovna celé množině Y^M. Pak pro danou permutaci τ množiny Y je podmnožina $\mathcal{F}_\tau$ rovna množině $\left(Y^M\right)_\tau$. Pišme jednodušeji Y^M_τ místo $\left(Y^M\right)_\tau$. V takovém případě pak máme následující výsledek formulovaný s použitím cyklového indexu $Z(H)$ permutační grupy H:

Věta.

Enumerátor $\gamma_\pi(Y^M_\tau, H)$ je dán formulí

$$\gamma_\pi(Y^M_\tau, H) = Z(H; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),$$

kde pro každé $\ell = 1, 2, \ldots, m$ je

$$\lambda_\ell = \sum_{i|\ell} i \sum x^\ell_{[\wp]\pi},$$

přičemž druhá suma je přes všechny cykly permutace τ délky i a pro každý takový cyklus je $\wp$ některý (kterýkoliv) prvek v tomto cyklu.

Důkaz.

Podle předchozí věty je enumerátor $\gamma_\pi(Y_\tau^M, H)$ dán formulí

$$\gamma_\pi(Y_\tau^M, H) = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} \Big(\sum_{f \in Y^M,\, \tau \circ f = f \circ \sigma} v_\pi(f) \Big).$$

Podle definice je cyklový index $Z(H)$ permutační grupy H dán formulí

$$Z(H) = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} Z(\sigma),$$

kde $Z(\sigma)$ je člen v proměnných $t_1, t_2, \ldots, t_m$ definovaný následovně:

$$Z(\sigma) = t_1^{j_1(\sigma)} t_2^{j_2(\sigma)} \ldots t_m^{j_m(\sigma)}.$$

Připomeňme, že zde pracujeme s typem $1^{j_1(\sigma)} 2^{j_2(\sigma)} \ldots m^{j_m(\sigma)}$ permutace σ.

Budeme tedy hotovi, když ukážeme, že pro každou permutaci $\sigma \in H$ platí rovnost

$$\sum_{f \in Y^M,\, \tau \circ f = f \circ \sigma} v_\pi(f) = Z(\sigma; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ jsou výše definované polynomy. Pokusme se tedy určit posledně jmenovanou sumu. Uvažme k tomu libovolné zobrazení $f \in Y^M$ splňující podmínku $\tau \circ f = f \circ \sigma$. Vezměme dále libovolný cyklus permutace σ délky ℓ a některý prvek $a \in M$ ležící v tomto cyklu. Pak $f(a) = \wp$ pro některý prvek $\wp \in Y$. Celý vybraný cyklus permutace σ lze pak vypsat ve tvaru

$$(a\ \sigma(a)\ \sigma^2(a)\ \ldots\ \sigma^{\ell-1}(a)).$$

Poněvadž $f(a) = \wp$ a platí $\tau \circ f = f \circ \sigma$, prvky tohoto cyklu se zobrazením f zobrazí na ℓ-tici prvků

$$(\wp\ \tau(\wp)\ \tau^2(\wp)\ \ldots\ \tau^{\ell-1}(\wp)).$$

Nakonec odtud vyplyne, že $f(\sigma^\ell(a)) = \tau^\ell(f(a))$. Ovšem $\sigma^\ell(a) = a$, poněvadž prvek a náležel cyklu permutace σ délky ℓ, a dále $f(a) = \wp$. Takže z předchozího poznatku posléze vyplyne, že $\tau^\ell(\wp) = \wp$. To ale znamená, že délka i cyklu permutace τ obsahujícího prvek $\wp$ dělí délku ℓ předtím vybraného cyklu permutace σ. Dosavadní úvahy lze navíc obrátit.

K vybranému cyklu permutace σ délky ℓ lze vzít kterýkoliv cyklus permutace τ, jehož délka i dělí ℓ. Pro zvolený prvek $a \in M$ ležící ve vybraném cyklu permutace σ a pro kterýkoliv prvek $\wp$ obsažený v cyklu permutace τ, který jsme právě vzali, lze uvažovat všechna zobrazení $f \in Y^M$ taková, že $f(a) = \wp$, a navíc taková, že tato f se budou na prvcích vybraného cyklu permutace σ chovat ve shodě s tím, jak to bylo popsáno výše. Provedeme-li takovou volbu pro každý cyklus permutace σ, bude tím plně určeno jedno pevné zobrazení $f \in Y^M$, které bude navíc splňovat podmínku $\tau \circ f = f \circ \sigma$. Připomeňme ještě znovu, že námi uvažované přiřazení proměnných jednotlivým obrazcům z množiny Y je konstantní na jednotlivých třídách rozkladu π, a je proto konstantní i na třídách rozkladu $r(\tau)$ indukovaného permutací τ. Vezmeme-li toto v úvahu, pak z definice členů $v_\pi(f)$ a z právě provedených úvah teď už vyplývá, že

$$\sum_{f \in Y^M,\, \tau \circ f = f \circ \sigma} v_\pi(f) = \lambda_1^{j_1(\sigma)} \lambda_2^{j_2(\sigma)} \dots \lambda_m^{j_m(\sigma)},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ jsou polynomy definované výše. Polynom na pravé straně poslední formule je ale vzhledem k definici člene $Z(\sigma)$ právě roven polynomu $Z(\sigma; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$. To již dokládá výše uvedené tvrzení, které bylo třeba dokázat. $\square$

Z právě dokázané věty bezprostředně plyne její následující důsledek. Poznamenejme jen, že v něm budou vystupovat veličiny pocházející z typu $1^{j_1(\tau)}2^{j_2(\tau)}\dots\eta^{j_\eta(\tau)}$ permutace τ. Připomeňme ještě, že počet konfigurací v množině $\mathfrak{M}_{Y_\tau^M,H}$, to jest počet všech orbit prvků podmnožiny Y_τ^M v podgrupě E^H obdržíme, když do enumerátoru $\gamma_\pi(Y_\tau^M, H)$ dosadíme hodnotu 1 za všechny proměnné.

Důsledek.

Počet konfigurací v množině $\mathfrak{M}_{Y_\tau^M,H}$ *je dán rovností*

$$|\mathfrak{M}_{Y_\tau^M,H}| = Z(H; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m),$$

kde pro každé $\ell = 1, 2, \dots, m$ *je*

$$\mu_\ell = \sum_{i|\ell} i j_i(\tau). \qquad \square$$

Jako příklad užití tohoto důsledku řešme následující úlohu.

Mějme kolo rulety rozdělené do n sektorů. Každý z těchto sektorů obarvíme jednou barvou z celkového počtu k barev. Mějme dále cyklus τ délky k na množině všech k barev. Klademe otázku, kolika způsoby lze sektory rulety obarvit, nezáleží-li přitom na pootočení rulety, tak aby takové obarvení bylo invariantní vzhledem k cyklické záměně barev určené zadaným cyklem τ. To znamená, že popsanou cyklickou záměnou barev v takovém obarvení má vzniknout jiné obarvení, které se ale od původního obarvení bude lišit jen nějakým pootočením rulety.

Podobně jako v dřívější úloze o obarvení sektorů rulety, i zde množinou M bude množina všech sektorů rulety. Množinou Y bude množina všech použitých barev. Podmnožinou $\mathcal{F}$ množiny Y^M bude nyní celá množina Y^M a podmnožinou $\mathcal{F}_\tau$ množiny Y^M bude tedy množina Y^M_τ. Podgrupou H grupy S_M všech permutací množiny M bude grupa všech otočení rulety. Pak H bude cyklická grupa řádu n na množině M, kterou jsme dříve značili symbolem C_M. K této podgrupě C_M vezměme jí odpovídající podgrupu E^{C_M} grupy $S_{Y^M_\tau}$ všech permutací množiny Y^M_τ. Pak orbity prvků z Y^M_τ v podgrupě E^{C_M} budou odpovídat obarvením sektorů rulety, kdy nerozlišujeme mezi obarveními, která se vzájemně liší pouze nějakým pootočením rulety, a to sice jen těm obarvením sektorů rulety, která budou invariantní vzhledem k cyklické záměně barev určené zadaným cyklem τ na množině Y.

Směřujeme k aplikaci předchozího důsledku. Grupou H tedy nyní bude cyklická grupa C_M řádu n. Permutací τ bude cyklus délky k, v němž se zaměňují všechny barvy z množiny Y. To znamená, že $j_k(\tau) = 1$ a $j_s(\tau) = 0$ pro všechna $s = 1, 2, \ldots,\ s \neq k$. Takže $\mu_\ell = k$ pro všechna $\ell = 1, 2, \ldots, n$ taková, že $k|\ell$, kdežto $\mu_\ell = 0$ pro všechna ostatní ℓ. Podle předchozího důsledku je potom počet orbit prvků z Y^M_τ v podgrupě E^{C_M}, to jest počet konfigurací v množině $\mathfrak{M}_{Y^M_\tau, C_M}$ dán rovností

$$|\mathfrak{M}_{Y^M_\tau, C_M}| = Z(C_M; \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, k, 0, \ldots).$$

Viděli jsme dříve, že cyklový index $Z(C_M)$ grupy C_M je roven

$$Z(C_M) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d)\, t_d^{\frac{n}{d}}.$$

Do tohoto cyklového indexu nyní dosazujeme výše určené hodnoty μ_d za proměnné t_d pro všechna $d|n$. Hodnota μ_d je nenulová a je rovna k právě tehdy, když $k|d$. Jestliže tedy $k \nmid n$, pak $\mu_d = 0$ pro všechna $d|n$, takže v tom případě máme

$$|\mathfrak{M}_{Y^M_\tau, C_M}| = 0.$$

Žádné obarvení sektorů rulety barvami z množiny Y v tom případě není invariantní vzhledem k cyklické záměně barev určené daným cyklem τ.

Předpokládejme tedy dále, že $k|n$. Pak hodnoty μ_d jsou nenulové a jsou rovny k pro ty dělitele $d|n$, které splňují $k|d$. Takový dělitel d je pak tvaru $d = ke$ pro nějaké $e|\frac{n}{k}$. V takovém případě pak dostáváme rovnost

$$|\mathfrak{M}_{Y_\tau^M, C_M}| = \frac{1}{n} \sum_{e|\frac{n}{k}} \varphi(ke)\, k^{\frac{n}{ke}}.$$

Tolik je tedy všech obarvení sektorů otočné rulety, která jsou invariantní vzhledem k dané cyklické záměně barev.