Obarvení několika rulet

Na kulatém stole podél jeho okraje je v kruhu umístěno n rulet. Každá ruleta má tvar kola rozděleného do m sektorů. K dispozici je k barev, kterými lze obarvit jednotlivé sektory všech rulet. Klademe otázku, kolik soustav obarvených rulet takto může vzniknout, považujeme-li za stejná každá taková dvě obarvení, z nichž jedno vznikne z druhého nějakým pootočením stolu a nějakými pootočeními jednotlivých rulet.

Uvidíme, že jde o situaci, kterou lze postihnout konstrukcí kompozice permutačních grup popsanou v předchozím paragrafu. Množinou M zde bude množina všech m sektorů jedné rulety. Množinou N zde bude množina všech n pozic u okraje kulatého stolu, na nichž jsou umístěny jednotlivé rulety. Množinu $N \times M$ lze pak vnímat jako množinu všech sektorů všech rulet rozmístěných okolo stolu. Množinou Y zde bude množina všech k použitých barev. Obarvení všech sektorů všech rulet těmito barvami lze interpretovat jako libovolná zobrazení množiny $N \times M$ do množiny Y. Podgrupou H grupy S_M zde bude grupa všech otočení jedné rulety. Pak H bude cyklická grupa řádu m na množině M, kterou jsme značili symbolem C_M. Podgrupou K grupy S_N zde bude grupa všech otočení kulatého stolu. Pak K bude cyklická grupa řádu n na množině N, kterou jsme značili symbolem C_N.

Zastavme se u kompozice $K[H]$ permutačních grup H a K, to jest u kompozice $C_N[C_M]$ cyklických grup C_M a C_N. Pak $C_N[C_M]$ je permutační grupa na množině $N \times M$ všech sektorů všech rulet. Každá permutace $[\![\tau, (\sigma_p)_{p \in N}]\!]$ z grupy $C_N[C_M]$ každému sektoru $(q, a) \in N \times M$ každé rulety, to jest sektoru a rulety na pozici q, předepisuje, do které rulety, to jest do rulety na které pozici $\tau(q)$ se ruleta s tímto sektorem otočí, a v závislosti na tom, na které pozici q byla původní ruleta obsahující tento sektor a, pak do kterého sektoru $\sigma_q(a)$ se tento sektor pootočí. Je jasné, že taková permutace je kompozicí nějakého otočení kulatého stolu s následnými pootočeními jednotlivých rulet umístěných kolem stolu. Vystihuje tedy kompozice $C_N[C_M]$ cyklických grup C_M a C_N plně situaci popsanou v naší úloze. Orbity libovolných zobrazení $N \times M \to Y$ v podgrupě $E^{C_N[C_M]}$ pak budou odpovídat navzájem odlišným obarvením sektorů všech rulet, když nerozlišujeme mezi obarveními, která mohou na sebe navzájem přejít nějakým otočením kulatého stolu a nějakými pootočeními jednotlivých rulet.

Ptáme se tedy na počet orbit libovolných zobrazení $N \times M \to Y$ v podgrupě $E^{C_N[C_M]}$, to jest na počet orbit v množině $\mathfrak{M}_{Y^{N\times M}, C_N[C_M]}$. S tím souvisí otázka ohledně příslušného enumerátoru $\gamma(Y^{N\times M}, C_N[C_M])$. Ovšem podle Pólyovy věty máme pro tento enumerátor vztah

$$\gamma(Y^{N\times M}, C_N[C_M]) = Z(C_N[C_M]; s_1, s_2, \ldots, s_{mn}),$$

kde pro každé $\ell = 1, 2, \ldots, mn$ je $s_\ell = x_1^\ell + x_2^\ell + \cdots + x_k^\ell$, neboť množina Y obsahuje k barev.

Víme, že počet orbit v množině $\mathfrak{M}_{Y^{N\times M}, C_N[C_M]}$ dostaneme, když dosadíme hodnotu 1 za všechny proměnné do enumerátoru. Kromě toho na základě ústřední věty z minulého paragrafu víme, že pro cyklové indexy permutačních grup obsažených v předchozím vyjádření enumerátoru $\gamma(Y^{N\times M}, C_N[C_M])$ platí rovnost

$$\begin{aligned} Z(C_N[C_M]; t_1, t_2, \dots, t_{mn}) = Z(C_N; Z(C_M; t_1, t_2, \dots, t_m), \\ Z(C_M; t_2, t_4, \dots, t_{2m}), \dots, Z(C_M; t_n, t_{2n}, \dots, t_{mn})). \end{aligned}$$

Dosazením sum $s_1, s_2, \dots, s_{mn}$ za proměnné $t_1, t_2, \dots, t_{mn}$ do této rovnosti obdržíme vztah

$$\begin{aligned} Z(C_N[C_M]; s_1, s_2, \dots, s_{mn}) = Z(C_N; Z(C_M; s_1, s_2, \dots, s_m), \\ Z(C_M; s_2, s_4, \dots, s_{2m}), \dots, Z(C_M; s_n, s_{2n}, \dots, s_{mn})). \end{aligned}$$

Dosazením z tohoto vztahu do vztahu pro enumerátor $\gamma(Y^{N\times M}, C_N[C_M])$, který byl uveden výše, obdržíme rovnost

$$\begin{aligned} \gamma(Y^{N\times M}, C_N[C_M]) = Z(C_N; Z(C_M; s_1, s_2, \dots, s_m), \\ Z(C_M; s_2, s_4, \dots, s_{2m}), \dots, Z(C_M; s_n, s_{2n}, \dots, s_{mn})). \end{aligned}$$

Dosazením hodnoty 1 za všechny proměnné do kterékoliv z uvedených sum $s_\ell = x_1^\ell + x_2^\ell + \dots + x_k^\ell$, kde $\ell = 1, 2, \dots, mn$, dostaneme pokaždé hodnotu k. Takže tímto dosazením do enumerátoru $\gamma(Y^{N\times M}, C_N[C_M])$ nám pro počet orbit v množině $\mathfrak{M}_{Y^{N\times M}, C_N[C_M]}$ vyjde vztah

$$\left|\mathfrak{M}_{Y^{N\times M},C_N[C_M]}\right| = Z(C_N; Z(C_M; k, k, \ldots, k), \\ Z(C_M; k, k, \ldots, k), \ldots, Z(C_M; k, k, \ldots, k)).$$

Zbývá hodnotu napravo v této rovnosti vypočítat. Z dřívějška víme, že cyklový index $Z(C_M)$ cyklické grupy C_M řádu m má tvar

$$Z(C_M) = \frac{1}{m}\sum_{c|m}\varphi(c)\, t_c^{\frac{m}{c}}.$$

Odtud plyne, že

$$Z(C_M; k, k, \ldots, k) = \frac{1}{m}\sum_{c|m}\varphi(c)\, k^{\frac{m}{c}}.$$

Rovněž víme, že cyklový index $Z(C_N)$ cyklické grupy C_N řádu n má tvar

$$Z(C_N) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)\, t_d^{\frac{n}{d}}.$$

Do tohoto cyklového indexu následně dosazujeme výše vypočtenou hodnotu $Z(C_M; k, k, \ldots, k)$ za všechny proměnné t_d pro $d|n$. Tak obdržíme rovnost

$$\left|\mathfrak{M}_{Y^{N\times M},C_N[C_M]}\right| = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)\left(\frac{1}{m}\sum_{c|m}\varphi(c)\, k^{\frac{m}{c}}\right)^{\frac{n}{d}}.$$

Tolik je tedy všech navzájem odlišitelných obarvení sektorů rulet umístěných po obvodu kulatého stolu, nezáleží-li nám na otáčení stolu a na otáčení jednotlivých rulet.