4 Test o střední hodnotě při známém rozptylu

Teorie k příkladu 4.1

- **nominální hladina významnosti** ... teoretická hladina významnosti (jaká by teoreticky měla být)
- **aktuální hl. významnosti** ... skutečná hl. významnosti (jaká ve skutečnosti je)
- *Příklad: Předokládáme, že nominální hladina významnosti námi zvoleného testu (např. o μ když σ^2 známe) je $\alpha = 0.05$. Naměříme (nagenerujeme) data, a na základě nich spočítáme aktuální hladinu významnosti $\widehat{\alpha}$. Pokud dodržíme předpoklady (naměřená (nagenerovaná) data budou pocházet z normálního rozdělení, všechny se stejným rozptylem σ^2), bude aktuální hladina významnosti $\widehat{\alpha} \doteq 0.05$. Nicméně, pokud předpoklady (ať už vědomě či nevědomě) porušíme, může se aktuální hladina významnosti $\widehat{\alpha}$ od nominální hladiny významnosti α výrazně lišit. A to je velký problém, zejména, když si uvědomíme, že závěr o H_0 většinou automaticky stanovujeme na (nominální) hladině významnosti $\alpha = 0.05$, a přitom například v důsledku porušení předpokladů je skutečná (aktuální) hladina významnosti úplně jiná.*
- **konzervativní test** ... test, jehož aktuální (skutečná) hladina významnosti $\widehat{\alpha}$ je menší než nominální hladina významnosti α, se nazývá *konzervativní test*. (Důsledkem je reálná situace, kdy (zejména v hraničních případech) měl test už teoreticky H_0 zamítnout, ale závěr testování je, že H_0 nezamítáme. Tj. test zamítá pomaleji, než by měl.)
- **liberální test** ... test, jehož aktuální (skutečná) hladina významnosti $\widehat{\alpha}$ je větší než nominální hladina významnosti α, se nazývá *liberální test*. (Důsledkem je reálná situace, kdy (zejména v hraničních případech) test ještě teoreticky neměl H_0 zamítnout, ale závěr testování je, že H_0 zamítáme. Tj. test zamítá rychleji, než by měl.)

Tip:

- Zamyslete se nad vztahem konzervativního testu a konzervativního IS (viz cvičení 02).
  - Řešení: Pokud je aktuální pst. pokrytí $1 - \widehat{\alpha}$ větší než nominální pst. pokrytí $\rightarrow$ aktuální IS je širší než nominální IS $\rightarrow$ pst, že parametr θ_0 z H_0 náleží do IS je větší než by teoreticky měla být $\rightarrow$ je větší pravděpodobnost, že H_0 nezamítáme $\rightarrow$ spíše dojde k situaci, že H_0 nezamítáme i když bychom už správně zamítat měli $\rightarrow$ test zamítá pomaleji $\rightarrow$ test založený na konzervativním IS je konzervativní.
- Zamyslete se nad vztahem liberálního testu a liberálního IS (viz cvičení 02).
  - Řešení: Pokud je aktuální pst. pokrytí $1 - \widehat{\alpha}$ menší než nominální pst. pokrytí $\rightarrow$ aktuální IS je užší než nominální IS $\rightarrow$ pst, že parametr θ_0 z H_0 náleží do IS je menší než by teoreticky měla být $\rightarrow$ je větší pravděpodobnost, že H_0 zamítáme $\rightarrow$ spíše dojde k situaci, že H_0 zamítáme i když bychom ještě správně zamítat neměli $\rightarrow$ test zamítá rychleji $\rightarrow$ test založený na liberálním IS je liberální.
  - Zamyslete se nad vztahem liberálního testu a konzervativní IS.
  - Řešení: Takový vztah neexistuje. Liberální test je v souladu s liberálním IS. Stejně jak konzervativní test můžeme uvažovat pouze v souvislosti s konzervativním IS.

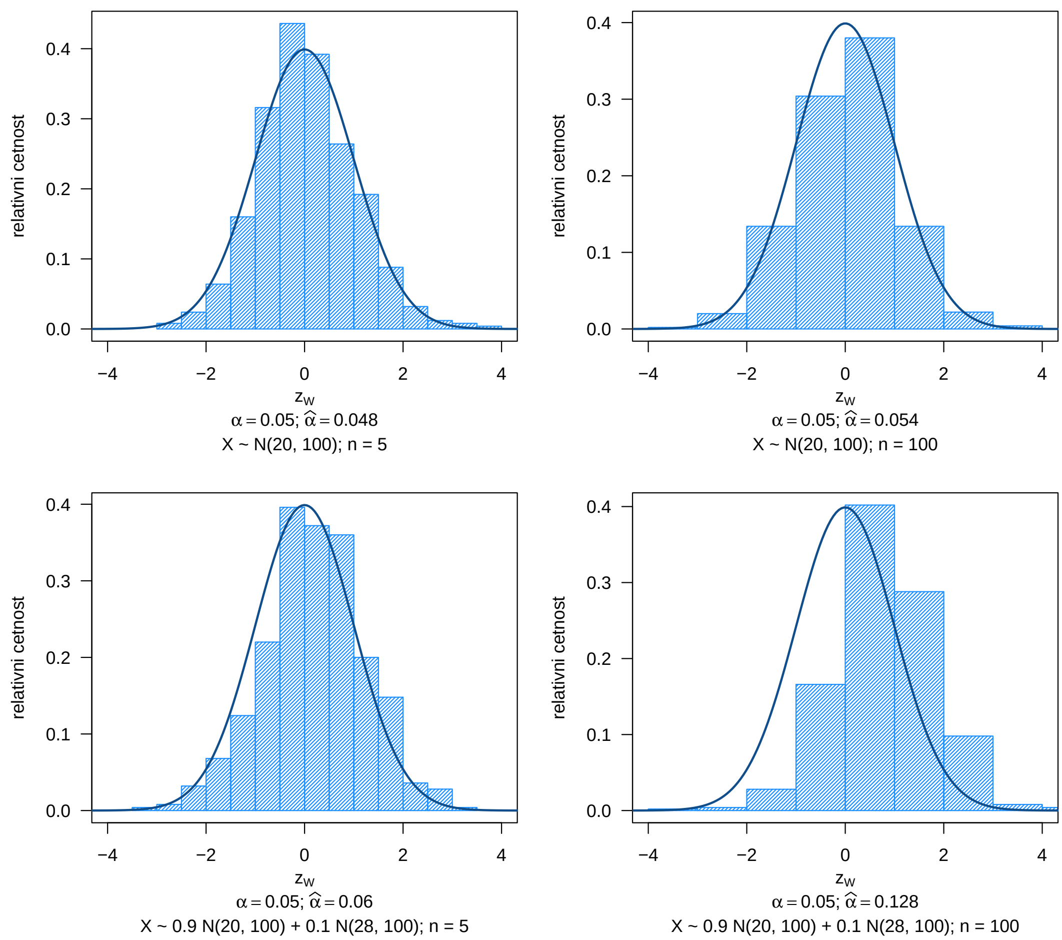
Příklad 4.1. Aktuální vs. nominální hladina významnosti α, konzervativní vs. liberální test
Nechť

(a) $X \sim N(20, 100)$;

(b) $X \sim pN(20, 100) + (1-p)N(28, 100)$, kde $p = 0.9$, tedy jde o směs dvou normálních rozdělení $X \sim N(20, 100)$ a $X \sim N(28, 100)$ v poměru $9 : 1$.

Pro obě části (a) i (b) vygenerujte $M = 500$ náhodných výběrů s rozsahem $n = 5$, resp. $n = 100$ a vypočítejte hodnotu testovací statistiky Z_W pro Waldův test nulové hypotézy $H_0 : \mu = \mu_0 = 20$ oproti $H_1 : \mu \neq 20$, když σ^2 známe ($\sigma^2 = 10^2$) na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Hodnoty testovacích statistik Z_W zaneste do histogramu. Vždy spočítejte, kolik testovacích statistik Z_W spadá do kritického oboru W. Toto číslo podělené hodnotou M představuje aktuální hladinu významnosti $\widehat{\alpha}$. Porovnejte tuto hodnotu s nominální hladinou významnosti α a v každé ze čtyř situací určete, zda je test konzervativní či liberální.

Poznámka: Test samozřejmě nemusí být ani konzervativní ani liberální, což je ten nejlepší případ. Konzervativnost nebo liberálnost testu chápeme jako (negativní) vlastnost testu, kterou, je-li přítomná, musíme mít na zřeteli.



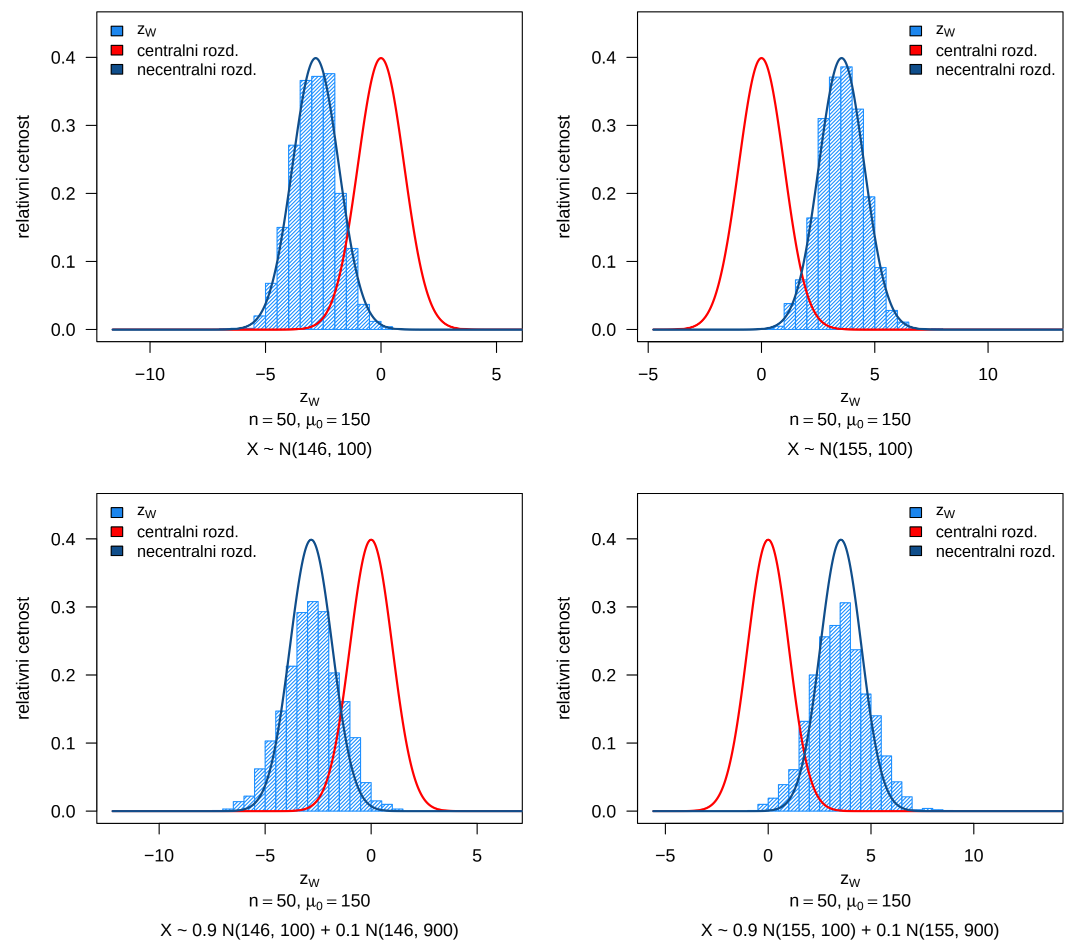
Obrázek 1: Rozdělení Waldovy testovací statistiky Z_W pro test o střední hodnotě μ při známém rozpylu $\sigma^2 = 10^2$; porovnání aktuální a nominální hladiny významnosti α

Příklad 4.2. Rozdělení testovací statistiky pro test o střední hodnotě μ, když σ^2 známe
Nechť náhodný výběr X pochází z normálního rozdělení, t.j. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pomocí simulační studie porovnejte rozdělení testovací statistiky Z_W pro test nulové hypotézy H_0: $\mu = 150$ (alternativní hypotéza H_1: $\mu \neq 150$), když rozptyl σ^2 známe, s rozdělením testovací statistiky stanovené na základě náhodného výběru se střední hodnotou μ. Parametry zvolte (a) $\mu = 146$, $\sigma^2 = 10^2$, $n = 50$; (b) $\mu = 155$, $\sigma^2 = 10^2$, $n = 50$.

Nechť dále X pochází ze směsi dvou normálních rozdělení, t.j. $X \sim [pN(\mu, 10^2) + (1-p)N(\mu, 30^2)]$, kde $p = 0.9$ a (c) $\mu = 146$; (d) $\mu = 155$. Proveďte simulační studii popsanou výše také pro tento náhodný výběr.

Nasimulujte M pseudonáhodných výběrů, $M = 1, \ldots, 2\,000$ a pro každý vypočítejte realizaci testovací statistiky $z_{W,\lambda}^{(m)} = \frac{\bar{x}_m - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ pro nulovou hypotézu H_0: $\mu = 150$ oproti H_1: $\mu \neq 150$. Vykreslete histogram testovacích statistik Z_W a superponujte jej jednak křivkou hustoty normálního rozdělení $N(\lambda, 1)$ s parametrem necentrality λ ($\lambda = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, kde μ je skutečná střední hodnota (relevantní za platnosti H_1)) a jednak křivkou hustoty standardizovaného normálního rozdělení $N(0, 1)$. Obě křivky potom vzájemně okometricky porovnejte.

Poznámka: U směsi křivka hustoty necentrálního rozdělení nesuperponuje histogram statistik z_W dostatečně. Zamyslete se nad tím, proč, a co z toho pro nás do praxe vyplývá. Odpověď uveďte formou komentáře.



Obrázek 2: Porovnání centrálního a necentrálního normálního rozdělení s rozdělením testovací statistiky Z_W testu o střední hodnotě μ při známém rozptylu σ^2

Teorie k příkladu 4.3

- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \to \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
- $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \to \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

b) $H_{02} : \mu \leq \mu_0$ $\quad$ $H_{12} : \mu > \mu_0$ ... pravostranná

- Kritický obor: $W = \langle u_{1-\alpha}\,;\,\infty)$
- $\beta_{12} = \Pr\left(H_0 \text{ nezamítáme } | H_0 \text{ neplatí }\right)$ ... CHDD
- $\beta_{12}^* = 1 - \beta_{12} = \Pr\left(H_0 \text{ zamítáme } | H_0 \text{ neplatí }\right)$ ... síla
-

$$\begin{aligned}
\beta_{12}^*(\mu) = 1 - \beta_{12}(\mu) &= \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > u_{1-\alpha}\right) = 1 - \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\alpha}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu_0+\mu-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\alpha}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\alpha}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\alpha} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(Z_W \leq u_{1-\alpha} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \qquad //\Phi\left(u_\alpha\right) = 1 - \Phi\left(-u_\alpha\right) = 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha}\right) \\
&= \Phi\left(u_\alpha + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \text{ ... síla pro } H_{12}
\end{aligned}$$

c) $H_{03} : \mu \geq \mu_0$ $\quad$ $H_{13} : \mu < \mu_0$ ... levostranná

- Kritický obor: $W = (-\infty\,;\,u_\alpha\rangle$
- $\beta_{13} = \Pr\left(H_0 \text{ nezamítáme } | H_0 \text{ neplatí }\right)$ ... CHDD
- $\beta_{13}^* = 1 - \beta_{13} = \Pr\left(H_0 \text{ zamítáme } | H_0 \text{ neplatí }\right)$ ... síla
-

$$\begin{aligned}
\beta_{13}^*(\mu) = 1 - \beta_{13}(\mu) &= \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_\alpha\right) = \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu_0+\mu-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_\alpha\right) \\
&= \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_\alpha\right) \\
&= \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\
&= \Pr\left(Z_W \leq u_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\
&= \Phi\left(u_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \qquad //\Phi\left(u_\alpha\right) = 1 - \Phi\left(-u_\alpha\right) = 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha}\right) \\
&= \Phi\left(-u_{1-\alpha} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \text{ ... síla pro } H_{13}
\end{aligned}$$

a) $H_{01} : \mu = \mu_0$ $\qquad$ $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ ... oboustranná

- Kritický obor: $W = (-\infty\,;\, u_{\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}\,;\, \infty)$
- $\beta_{11} = \Pr(H_0 \text{ nezamítáme } | H_0 \text{ neplatí })$ ... CHDD
- $\beta^*_{11} = 1 - \beta_{11} = \Pr(H_0 \text{ zamítáme } | H_0 \text{ neplatí })$ ... síla
-

$$\begin{aligned}
\beta^*_{11}(\mu) = 1 - \beta_{11}(\mu) &= \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{\alpha/2}\right) + \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > u_{1-\alpha/2}\right)\\
&= (\dots)\\
&= \Pr\left(Z_W \leq u_{\alpha/2} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) + 1 - \Pr\left(Z_W \leq u_{1-\alpha/2} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\\
&= (\dots)\\
&= \Phi\left(u_{\alpha/2} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) + \Phi\left(u_{\alpha/2} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \dots \text{síla pro } H_{11}
\end{aligned}$$

Příklad 4.3. Silofunkce pro test o střední hodnotě μ když σ^2 známe
Předpokládejme, že $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 známe. Nechť $\theta = \mu$. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujeme všechny tři typy hypotéz

a) $H_{01} : \mu = \mu_0$ oproti $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ (oboustranná);

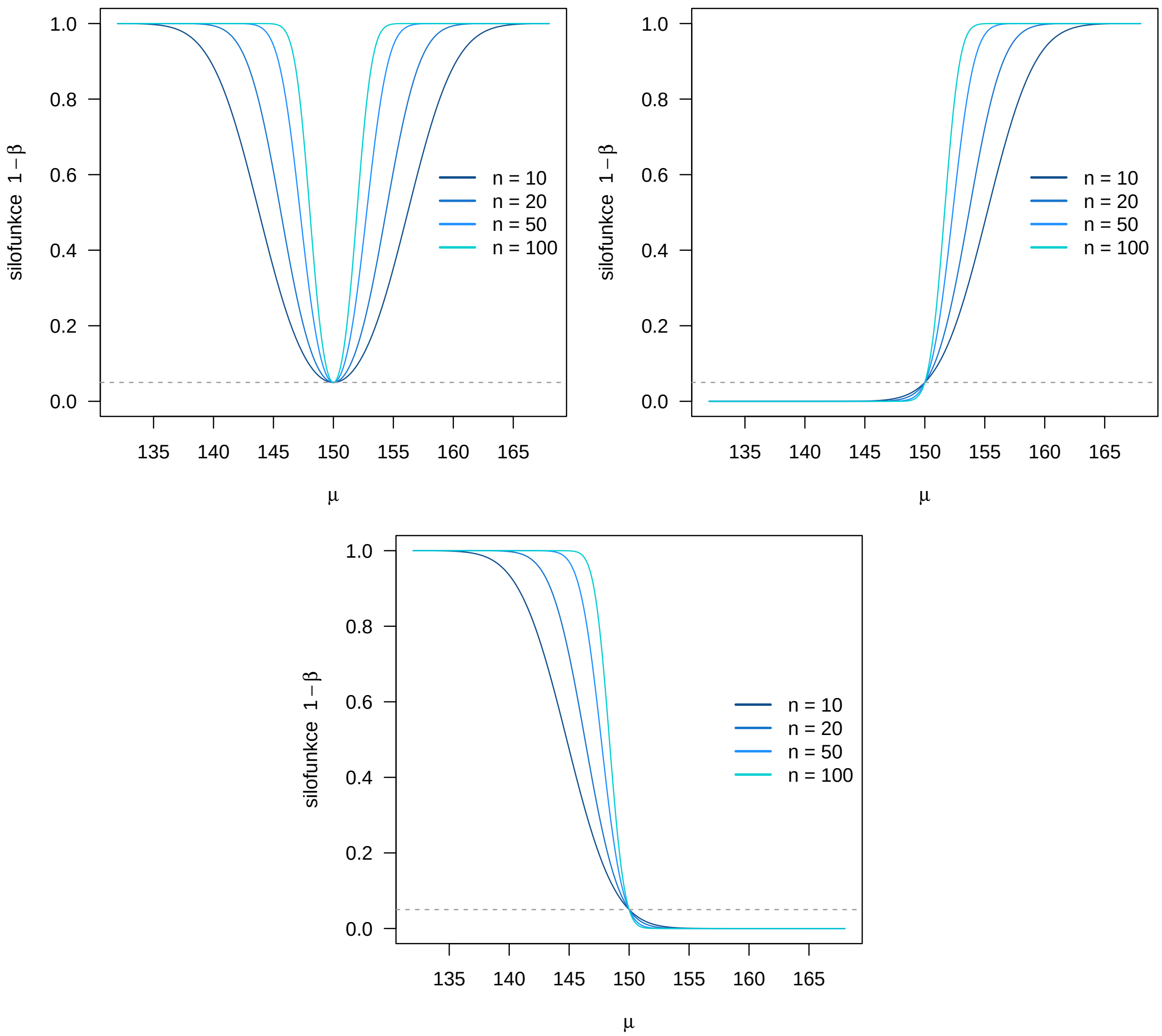
b) $H_{02} : \mu \leq \mu_0$ oproti $H_{12:}\ \mu > \mu_0$ (pravostranná);

c) $H_{03} : \mu \geq \mu_0$ oproti $H_{13} : \mu < \mu_0$ (levostranná).

Odvoďte tvary silofunkcí pro všechny tři typy hypotéz (a)–(c), t.j. tvary $\beta^*_{11}(\mu)$, $\beta^*_{12}(\mu)$ a $\beta^*_{13}(\mu)$ (odvození viz teorie k příkladu 4.3).

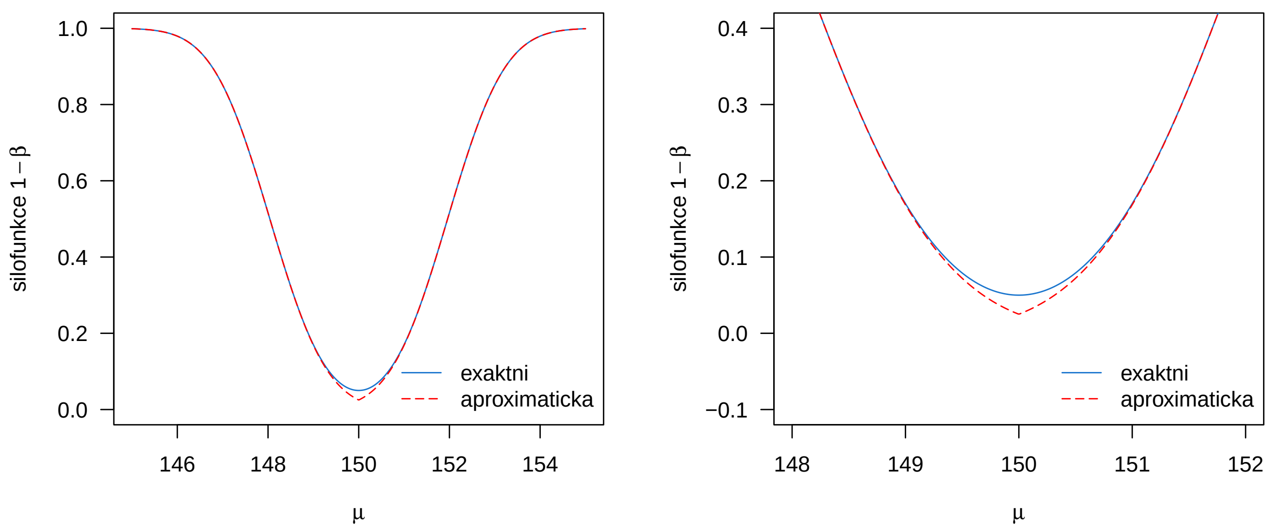
Dále nakreslete silofunkce pro všechny tři typy hypotéz (a)–(c), kde $\mu_0 = 150$, a $\sigma^2 = 10^2$. Do jednoho obrázku zakreslete vždy tvary silofunkcí pro $n = 10$, $n = 20$, $n = 50$ a $n = 100$. Hodnoty μ volte rozumně, např. v intervalu $\langle 132; 168\rangle$.

Poznámka: Ve všech třech případech (a), (b) i (c) vidíme, že v hodnotě $\mu = \mu_0 = 150$ se hodnota síly rovná hodnotě hladiny významnosti $\alpha = 0.05$. To vychází z toho, že my předem volíme pravděpodobnost s jakou H_0 zamítáme, a to prostřednictvím hladiny významnosti α (v jejím případě jde z definice o volbu rizika chyby, že H_0 nesprávně zamítáme přestože platí). Pro jiné μ (libovolné μ; $\mu \neq 150$) H_0 neplatí a zamítáme-li H_0, žádné chyby se nedopouštíme. Z grafu je potom krásně vidět, jak s rostoucí vzdáleností μ od $\mu_0 = 150$ roste pravděpodobnost, že H_0 zamítáme (tj. roste síla testu).



Obrázek 3: Silofunkce testu o střední hodnotě μ při známém rozptylu σ^2 pro (a) oboustrannou alternativu, (b) pravostrannou alternativu, (c) levostrannou alternativu

Příklad 4.4. Porovnání exaktní a aproximatické silofunkce
Uveďte tvary přesné silofunkce β_{11}^* a přibližné silofunkce $\tilde{\beta}_{11}^*$ pro test $H_{01} : \mu = \mu_0$ oproti $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ když σ^2 známe. Nakreslete křivky obou silofunkcí do jednoho grafu, kde na ose x budou různé hodnoty parametru μ na ose y vynesená silofunkce, a porovnejte jejich tvary. Výsledek slovně okomentujte. Hodnotu n zvolte 100, $\mu_0 = 150$ a $\sigma^2 = 10^2$. Rozsah osy x volte rozumně, pro globální pohled např. $\langle 145; 155 \rangle$, pro lokální zaměření rozdílů zvolte rozsah osy x $\langle 148; 152 \rangle$.



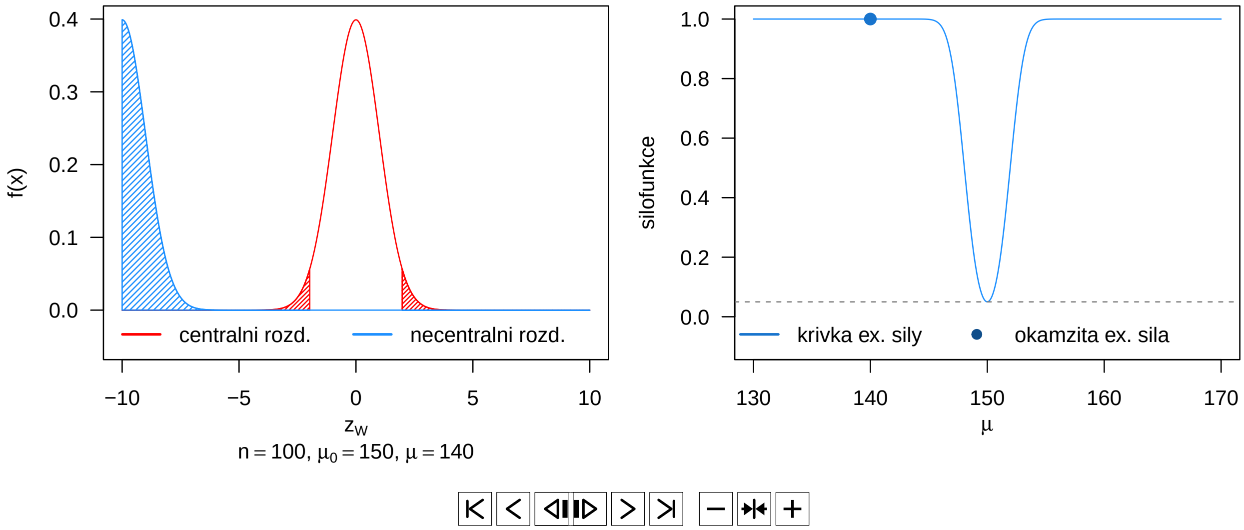
Obrázek 4: Porovnání exaktní a aproximatické silofunkce pro test o střední hodnotě μ při známém rozptylu σ^2

Poznámka:

- Aproximatickou sílu můžeme spočítat pouze pro oboustrannou alternativu, neboť její myšlenka je společné vyjádření obou částí síly (dvou distribučních funkcí) prostřednictvím jedné distribuční funkce s absolutní hodnotou. U jednostranných alternativ je síla tvořena pouze jednou distribuční funkcí, proto zde myšlenka fungující u oboustranné alternativy postrádá smysl.
- Z vykreslených grafů vidíme, že exaktní a aproximatická křivka se od sebe nejvíce odlišují v okolí $\mu = \mu_0 = 150$. Čím více se od $\mu = \mu_0 = 150$ vzdalujeme, tím je aproximace přesnější. Zamyslete se nad tím, proč tomu tak je.
  - **Odpověď:** Aproximatická síla je založena na zanedbání jedné ze dvou distribučních funkcí, které tvoří exaktní sílu. Z odvození, které je uvedené v pdf s komentáři a pseudokódem, je zřejmé, že s rostoucí vzdáleností $\mu - \mu_0$ dochází v exaktní síle ke zmenšování hodnoty jedné z distribučních funkcí, takže pokud tuto distr. funkci v aproximatické síle zanedbáme, zas tak moc se nestane (rozdíl mezi oběma silami bude malý). Nicméně v okolí $\mu = \mu_0 = 150$ je vzdálenost μ od μ_0 malá a do výsledné hodnoty exaktní síly přispívají velkým dílem obě distribuční funkce. Pokud tedy jednu z těchto distribučních funkcí zanedbáváme, přicházíme v aproximatické síle o její příspěvek (aproximatická síla je v okolí $\mu = \mu_0$ výrazněji menší než exaktní síla).

Příklad 4.5. Silofunkce testu o střední hodnotě μ když σ^2 známe
Předpokládejme, že $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = 10^2$, $n = 100$. Nechť $\theta = \mu$. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujeme hypotézu $H_{01} : \mu = \mu_0$ oproti $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ (oboustranná), kde $\mu_0 = 150$.

Vytvořte animaci zobrazující (a) změnu polohy necentrálního rozdělení vzhledem k hodnotě centrálního rozdělení testovací statistiky testu o μ když σ^2 známe, spolu s barevně odlišenou oblastí kritického oboru a exaktní síly; (b) změnu hodnoty exaktní silofunkce; při měnící se střední hodnotě náhodného výběru $\mu = 140, 141, \ldots, 146, 146.5, \ldots, 153.5, 154, 155, \ldots 160$.



Obrázek 5: Průběh síly testu o střední hodnotě μ když σ^2 známe – oboustranná alternativa

Teorie k příkladu 4.6

- $\alpha = 0.05$, $\beta^*_{1i}(\mu) = 0.8$ (síla) $\rightarrow 1 - \beta^*_{1i}(\mu) = \beta_{1i}(\mu) = 0.2$ $\Pr(CHDD)$, $i = 1,2,3$
- $\alpha \ldots \Pr(H_0$ zamítáme $\mid H_0$ platí$) = 0.05$
- $\beta_{1i} \ldots \Pr(H_0$ nezamítáme $\mid H_0$ neplatí$) = 0.20$, $i = 1,2,3$

1. $H_{01} : \mu = \mu_0$ $\quad H_{11} : \mu \neq \mu_0$ . . . oboustranná
   - $\mu \in \{145, 145.5, \ldots 154.5, 155\}$
   -

$$\beta^*_{11}(\mu) \approx \Phi\left(u_{\alpha/2} + \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma}\sqrt{n}\right) \qquad \text{(aproximatická síla)}$$

$$u_{\beta^*_{11}(\mu)} \approx u_{\alpha/2} + \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma}\sqrt{n}$$

$$\frac{u_{\beta^*_{11}(\mu)} - u_{\alpha/2}}{|\mu - \mu_0|}\sigma \approx \sqrt{n}$$

$$n_{min} \geq \frac{\left(u_{\beta^*_{11}(\mu)} - u_{\alpha/2}\right)^2}{|\mu - \mu_0|^2}\sigma^2$$

$$n_{min} \geq \frac{\left(u_{1-\beta_{11}(\mu)} - u_{\alpha/2}\right)^2}{|\mu - \mu_0|^2}\sigma^2 \qquad //u_{1-\alpha} = -u_\alpha$$

$$n_{min} \geq \frac{\left(-u_{\beta_{11}(\mu)} - u_{\alpha/2}\right)^2}{|\mu - \mu_0|^2}\sigma^2 \qquad //(-a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$n_{min} \geq \frac{\left(u_{\beta_{11}(\mu)} + u_{\alpha/2}\right)^2}{|\mu - \mu_0|^2}\sigma^2$$

2. $H_{02} : \mu \leq \mu_0$ $\quad H_{12} : \mu > \mu_0$ . . . pravostranná
   - $\mu \in \{150.25, 150.5, 150.75, \ldots 153.5, 153.75, 154\}$
   -

$$\beta^*_{12}(\mu) = \Phi\left(u_\alpha + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$u_{\beta^*_{12}(\mu)} = u_\alpha + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

$$\frac{u_{\beta^*_{12}(\mu)} - u_\alpha}{\mu - \mu_0}\sigma = \sqrt{n}$$

$$n_{min} \geq \frac{\left(u_{\beta^*_{12}(\mu)} - u_\alpha\right)^2}{(\mu - \mu_0)^2}\sigma^2$$

$$n_{min} \geq \frac{\left(u_{1-\beta_{12}(\mu)} - u_\alpha\right)^2}{(\mu - \mu_0)^2}\sigma^2 \qquad //u_{1-\alpha} = -u_\alpha$$

$$n_{min} \geq \frac{\left(-u_{\beta_{12}(\mu)} - u_\alpha\right)^2}{(\mu - \mu_0)^2}\sigma^2 \qquad //(-a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$n_{min} \geq \frac{\left(u_{\beta_{12}(\mu)} + u_\alpha\right)^2}{(\mu - \mu_0)^2}\sigma^2$$

3. $H_{03} : \mu \geq \mu_0$ $\quad H_{13} : \mu < \mu_0$ . . . levostranná

- $\mu \in \{146, 146.25, 146.5, \dots 149.5, 149.75\}$
-

$$\beta^*_{13}(\mu) = \Phi\left(u_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$
$$u_{\beta^*_{13}(\mu)} = u_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$
$$u_{\beta^*_{13}(\mu)} = u_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$
$$\frac{u_{\beta^*_{13}(\mu)} - u_\alpha}{\mu_0 - \mu}\sigma = \sqrt{n}$$
$$n_{min} \geq \frac{\left(u_{\beta^*_{13}(\mu)} - u_\alpha\right)^2}{(\mu_0 - \mu)^2}\sigma^2$$
$$n_{min} \geq \frac{\left(u_{1-\beta_{13}(\mu)} - u_\alpha\right)^2}{(\mu_0 - \mu)^2}\sigma^2 \qquad //u_{1-\alpha} = -u_\alpha$$
$$n_{min} \geq \frac{\left(-u_{\beta_{13}(\mu)} - u_\alpha\right)^2}{(\mu_0 - \mu)^2}\sigma^2 \qquad //(-a-b)^2 = (a+b)^2$$
$$n_{min} \geq \frac{\left(u_{\beta_{13}(\mu)} + u_\alpha\right)^2}{(\mu_0 - \mu)^2}\sigma^2$$

Příklad 4.6. Minimální rozsah náhodného výběru
Předpokládejme, že $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = 10^2$. Nechť $\theta = \mu$. Testujeme všechny tři typy hypotéz:

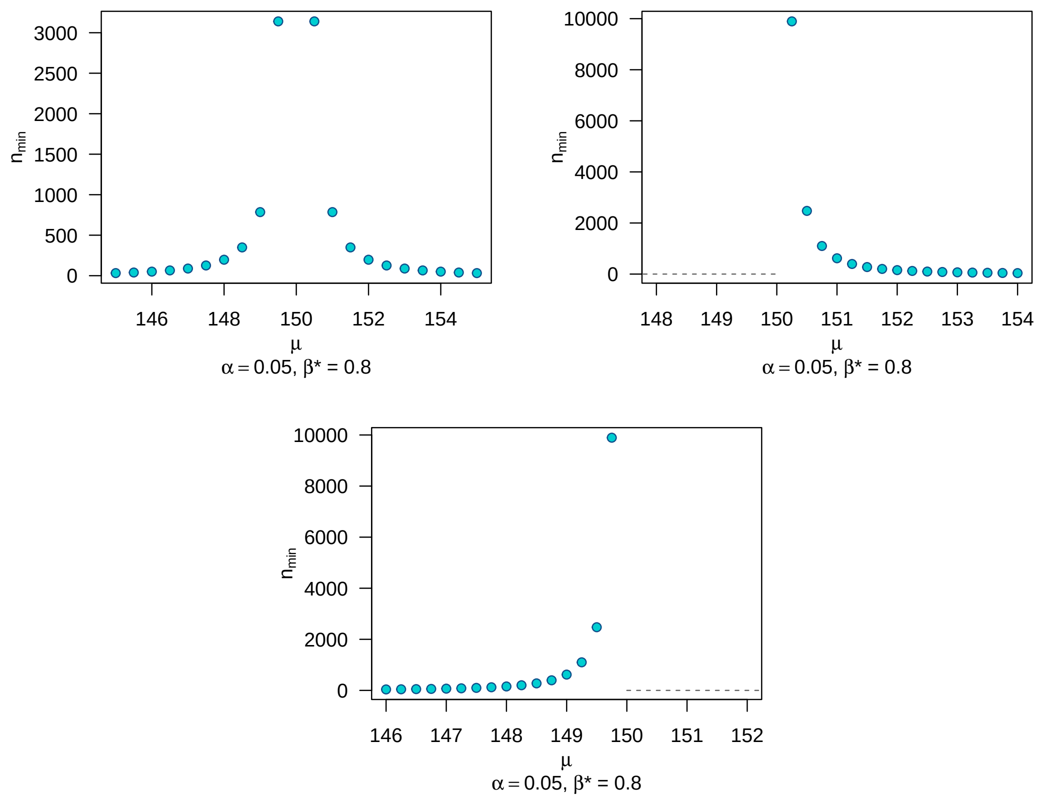
1. $H_{01} : \mu = \mu_0$ oproti $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ (oboustranná),
2. $H_{02} : \mu \leq \mu_0$ oproti $H_{12:}\ \mu > \mu_0$ (pravostranná),
3. $H_{03} : \mu \geq \mu_0$ oproti $H_{13} : \mu < \mu_0$ (levostranná),

kde $\mu_0 = 150$ Vypočítejte minimální rozsah náhodného výběru pro test nulové hypotézy při $\alpha = 0.05$ a $1 - \beta = 0.8$, pro $\mu \in \{145, 145.5, \dots 154.5, 155\}$ (ad (1)); $\mu \in \{150.25, 150.5, 150.75, \dots 153.5, 153.75, 154\}$ (ad (2)); $\mu \in \{146, 146.25, 146.5, \dots 149.5, 149.75\}$ (ad (3)). Závislost minimálního rozsahu náhodného výběru na hodnotě μ zakreslete do grafu pomocí bodů (na osu x vyneste parametr μ, na osu y minimální rozsah náhodného výběru.).

Určete, jaký bude minimální rozsah náhodného výběru pro test nulové hypotézy $H_0 : \mu = \mu_0$, kde $\mu_0 = 150$ oproti alternativním hypotézám H_{11}, H_{12} a H_{13} při předem stanovené síle $\beta^* = 0.8$ a hladině významnosti $\alpha = 0.05$, předpokládáme-li, že výběrová střední hodnota μ bude nabývat hodnot $\mu \in \{145, 146, 147, 148, 149, 149.5, 150.5, 151, 152, 153, 155\}$.

Tabulka 1: Minimální rozsah náhodného výběru pro test o μ když σ^2 známe; $\alpha = 0.05$, $\beta^* = 0.8$, $\mu_0 = 150$

μ	145.0	146.0	147.0	148.0	149.0	149.5	150.5	151.0	152.0	153.0	154.0	155.0
$H_{11} : \mu = \mu_0$	32.0	50.0	88.0	197.0	785.0	3140.0	3140.0	785.0	197.0	88.0	50.0	32.0
$H_{12} : \mu > \mu_0$							2474.0	619.0	155.0	69.0	39.0	25.0
$H_{13} : \mu < \mu_0$	25.0	39.0	69.0	155.0	619.0	2474.0						



Obrázek 6: Minimální rozsahy náhodných výběrů pro test o střední hodnotě μ při předem zvolených hodnotách α, β, μ a μ_0 pro (a) oboustrannou, (b) pravostrannou, (c) levostrannou alternativu