

5 Test o střední hodnotě při neznámém rozptylu

Příklad 5.1. Rozdělení testovacích statistik t_W a T_W^2

Nechť náhodný výběr X pochází z normálního rozdělení, t.j. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 150$ a $\sigma^2 = 30^2$. Rozsah náhodného výběru zvolte (a) $n = 10$; (b) $n = 100$. Pomocí simulační studie ($M = 1000$) ověřte, že pro test o střední hodnotě μ když σ^2 neznáme, platí za platnosti H_0 následující:

1. $T_W = \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$;

2. $T_W^2 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{s^2/n} \sim F_{1, n-1}$.

Vygenerujte $M = 1000$ pseudonáhodných výběrů o rozsahu $n = 5$. Pro každý náhodný výběr vypočítejte hodnoty realizací testovacích statistik T_W a T_W^2 . Vytvořte histogramy těchto testovacích statistik a superponujte je křivkami příslušného rozdělení. Dále vytvořte animaci, pomocí které vizualizujete přesnost rozdělení testovacích statistik T_W , resp. T_W^2 při různých rozsazích náhodného výběru. Animaci spravte pro měnící se $n \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 100, 250, 500\}$

Obrázek 1: Studentovo rozdělení testovací statistiky T_W a Fisherovo rozdělení testovací statistiky T_W^2 pro test o střední hodnotě μ při neznámém rozptylu

Příklad 5.2. Rozdělení testovacích statistik U_W , U_S a U_{LR}

Nechť náhodný výběr X pochází z normálního rozdělení, t.j. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 150$ a $\sigma^2 = 30^2$. Rozsah náhodného výběru zvolte (a) $n = 10$; (b) $n = 100$. Pomocí simulační studie ($M = 1000$) ověřte, že pro test o střední hodnotě μ když σ^2 neznáme platí za platnosti H_0 následující:

1. $U_W = t_W^2 \frac{n}{n-1} \sim \chi_1^2$;

2. $U_S = \frac{\frac{nt_W^2}{n-1}}{1 + \frac{t_W^2}{n-1}} \sim \chi_1^2$;

3. $U_{LR} = n \ln \left(1 + \frac{t_W^2}{n-1} \right) \sim \chi_1^2$.

Vygenerujte $M = 1000$ pseudonáhodných výběrů o rozsahu $n = 5$. Pro každý náhodný výběr vypočítejte hodnoty realizací testovacích statistik U_W , U_S a U_{LR} . Vytvořte histogramy těchto testovacích statistik a superponujte je křivkami χ^2 rozdělení. Dále vytvořte animaci, pomocí které vizualizujete přesnost χ^2 rozdělení testovacích statistik U_W , U_S a U_{LR} při různých rozsazích náhodného výběru. Animaci spravte pro měnící se $n \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 100, 250, 500\}$.

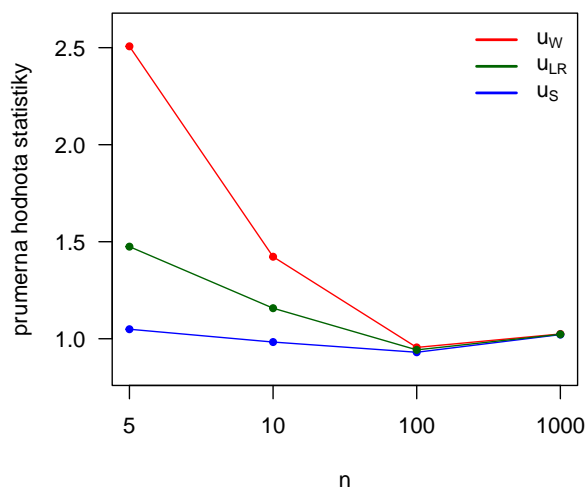
Obrázek 2: χ^2 rozdělení testovacích statistik U_W , U_S a U_{LR} pro test o střední hodnotě μ při neznámém rozptylu

Příklad 5.3. Porovnání testovacích statistik U_W , U_S a U_{LR}

Pomocí simulační studie porovnejte tvary tří testovacích statistik (1) $U_W = \frac{n}{n-1}t_W^2$, (2) $U_S = \frac{nt_W^2}{n-1+t_W^2}$ a (3) $U_{LR} = n \ln \left(1 + \frac{t_W^2}{n-1}\right)$, kde $t_W^2 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{S_{n-1}^2/n}$ a ukažte, že platí vztah $U_S < U_{LR} < U_W$.

Vygenerujte $M = 1000$ náhodných výběrů $X \sim N(0, 3)$ a pro každý výběr vypočítejte hodnoty testovacích statistik U_W , U_S a U_{LR} pro test nulové hypotézy $H_0 : \mu = \mu_0 = 0$ oproti alternativní hypotéze $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Pro každou testovací statistiku následně najdete její jádrový odhad a křivky jádrového odhadu pro pevně zvolené n vykreslete do jednoho grafu. Vytvořte animaci zobrazující tvary křivek jádrových odhadů testovacích statistik při rostoucím rozsahu náhodných výběrů n . Rozsah výběrů n volte postupně $n = 2, 3, \dots, 9, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 100, 250, 500$. Dále vypočítejte průměrné hodnoty testovacích statistik U_W , U_S a U_{LR} pro $n = 5, 10, 100$ a 1000 a zanešte je do jednoho grafu.

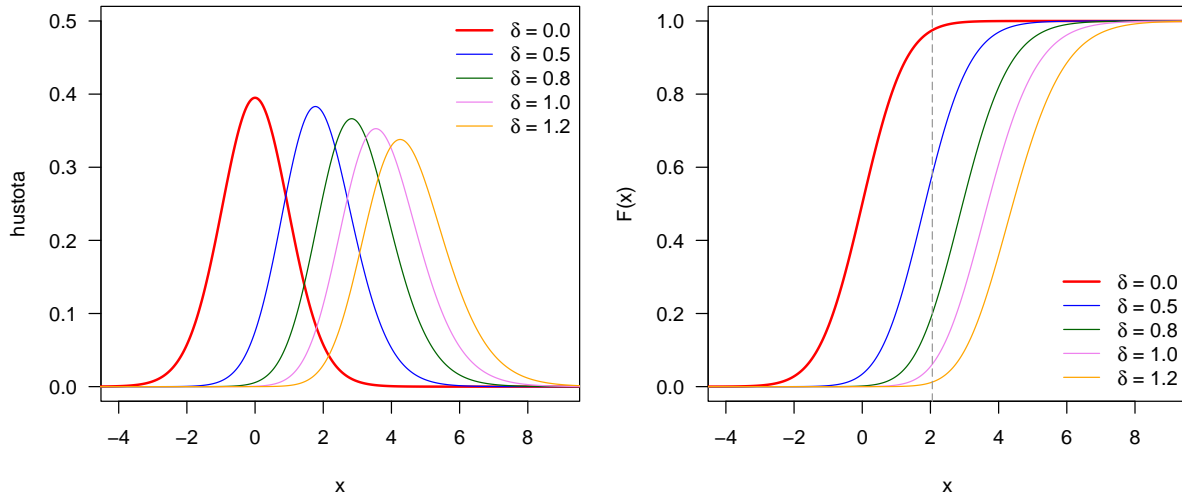
Obrázek 3: Porovnání tvarů testovacích statistik U_W , U_S a U_{LR} testu o střední hodnotě při neznámém rozptylu σ^2



Obrázek 4: Porovnání průměrů testovacích statistik U_W , U_S a U_{LR} pro $n = 5, 10, 100, 1000$

Příklad 5.4. Hustota a distribuční funkce centrálního a necentrálního t -rozdělení

Nakreslete (a) hustotu; (b) distribuční funkci jednoho centrálního a čtyř necentrálních t -rozdělení $t_{n-1,\lambda}$ ($\delta = \mu - \mu_0$ a $\lambda = \delta/(\sigma/\sqrt{n})$) do jednoho obrázku tak, aby byly odlišitelné barvou nebo typem čáry. Zvolte $\mu_0 = 0$, $\sigma = 1.4$, $n = 26$, $\delta = 0, 0.5, 0.8, 1$ a 1.2 .



Obrázek 5: Graf (a) hustoty; (b) distribuční funkce (i) centrálního t -rozdělení; (ii) čtyř necentrálních t -rozdělení s parametrem necentrality δ

Příklad 5.5. Silofunkce testu o střední hodnotě μ když σ^2 neznáme

Předpokládejme, že $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 neznáme, ale předpokládáme, že $\sigma^2 = 10^2$, a $n = 100$. Necht' $\theta = \mu$. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujeme hypotézu $H_{01} : \mu = \mu_0$ oproti $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ (oboustranná), kde $\mu_0 = 150$.

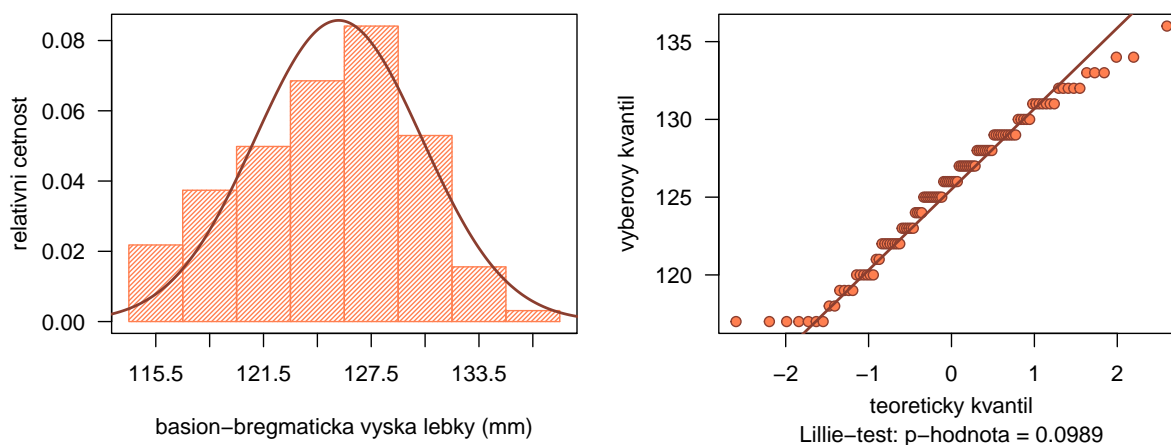
Vytvořte animaci zobrazující změnu polohy necentrálního rozdělení vzhledem k hodnotě centrálního rozdělení testovací statistiky testu o μ když σ^2 neznáme, spolu s barevně odlišenou oblastí kritického oboru a exaktní síly; změnu hodnoty exaktní silofunkce; při měnící se střední hodnotě náhodného výběru $\mu = 140, 141, \dots, 146, 146.5, \dots, 153.5, 154, 155, \dots, 160$.

Obrázek 6: Průběh síly testu o střední hodnotě μ když σ^2 neznáme – oboustranná alternativa

Příklad 5.6. Test o střední hodnotě μ když σ^2 neznáme; praktický příklad

Z archivních materiálů (Schmidt, 1888) máme k dispozici původní kranio-metrické údaje 215 dospělých mužů a 107 dospělých žen ze starověké egyptské populace o basion–bregmatické výšce lebky. Údaje jsou k dispozici v souboru 11-two-samples-means-skull.txt. Současně máme k dispozici hodnoty basion–bregmatické výšky ($\bar{x}_m = 133.977$ mm; $\bar{x}_f = 126.942$ mm) a hodnoty směrodatné odchylky ($s_m = 5.171$ mm; $s_f = 4.430$ mm) mužů a žen novověké egyptské populace.

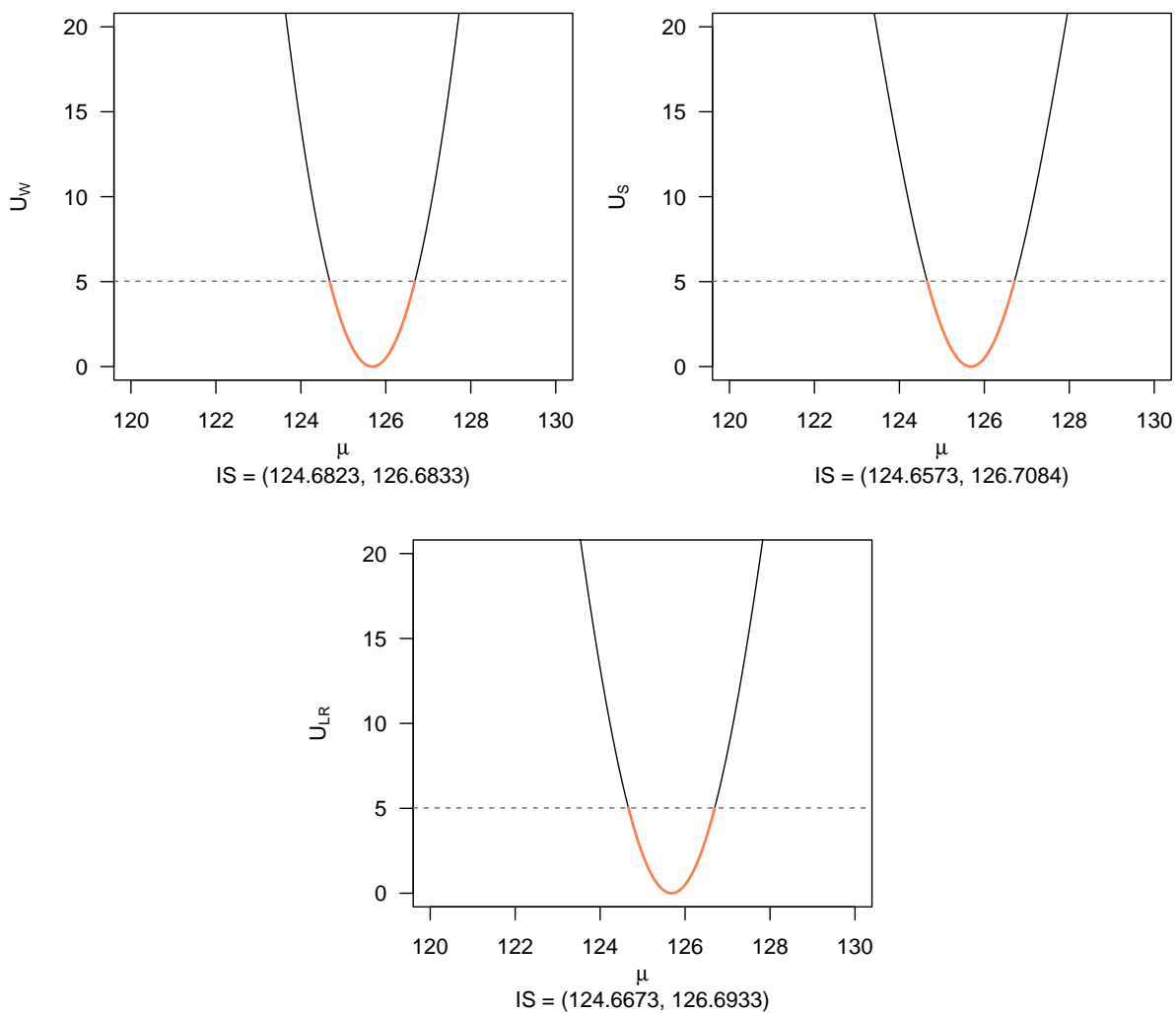
Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ otestujte nulovou hypotézu $H_0 : \mu_f = 126.942$ oproti alternativní hypotéze $H_1 : \mu_f \neq 126.942$. Před testováním ověřte předpoklad normality. Testování proveďte pomocí (a) kritického oboru; (b) intervalu spolehlivosti; (c) p-hodnoty při použití testovacích statistik (1) T_W , (2) U_W , (3) U_S , (4) U_{LR} . Dále vykreslete grafy zobrazující věrohodnostní intervaly spolehlivosti pro test střední hodnotě získané na základě testovacích statistik U_W , U_S a U_{LR} .



Obrázek 7: Vizualizace normality basion-bregmatické výšky lebky u žen pomocí (a) histogramu, (b) Q-Q grafu

Tabulka 1: Výsledky testu o střední hodnotě μ při neznámém rozptylu σ^2 při použití testovacích statistik T_W , U_W , U_S a U_{LR}

Statistika	$\hat{\mu}$	statistika	W_{hh}	W_{dh}	IS_{dh}	IS_{hh}	p-hodnota
T_W	125.6822	-2.8004	-2.2737	2.2737	124.6594	126.7051	0.0061
U_W	125.6822	7.9163		5.0239	124.6823	126.6833	0.0049
U_S	125.6822	7.3710		5.0239	124.6573	126.7084	0.0066
U_{LR}	125.6822	7.6371		5.0239	124.6673	126.6933	0.0057



Obrázek 8: 95% Věrohodnostní empirické intervaly spolehlivosti pro test o střední hodnotě μ získané na základě testovacích statistik U_W , U_S a U_{LR}