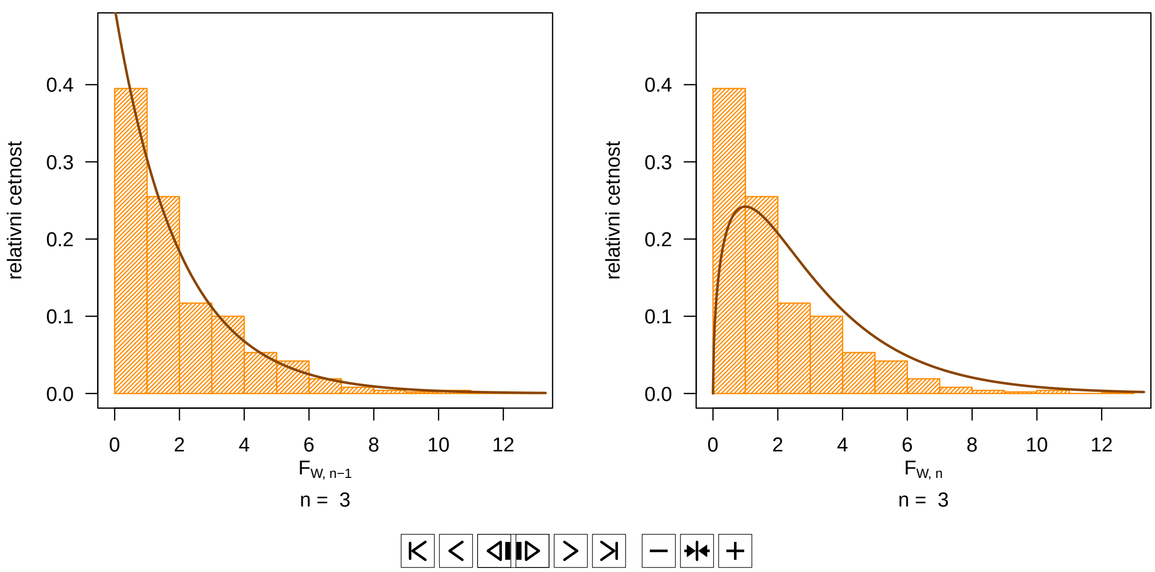
6 Test o rozptylu

Příklad 6.1. Rozdělení testovacích statistik jednovýběrového testu o rozptylu σ^2
Nechť náhodný výběr X pochází z normálního rozdělení, t.j. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 150$ a $\sigma^2 = 30^2$. Pomocí simulační studie ověřte, že pro test o rozptylu σ^2 platí za platnosti H_0 následující:

1. $F_{W,n-1} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ exaktně;

2. $F_{W,n} = \frac{nS_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_n$ asymptoticky.

Vygenerujte $M = 1000$ pseudonáhodných výběrů o rozsahu $n = 3$. Pro každý náhodný výběr vypočítejte hodnoty realizací testovacích statistik $F_{W,n-1}$, $F_{W,n}$. Vytvořte histogramy těchto testovacích statistik a superponujte je křivkami příslušného rozdělení. Dále vytvořte animaci, ze které bude zřejmé, jak se s rostoucím n rozdělení testovací statistiky $F_{W,n}$ asymptoticky blíží k χ^2_n rozdělení, zatímco testová statistika $F_{W,n-1}$ je exaktním rozdělením popsána dostatečně dobře i pro nízké rozsahy náhodného výběru. Animaci spravte pro měnící se $n \in \{3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 100, 150, 200, 250, 500\}$

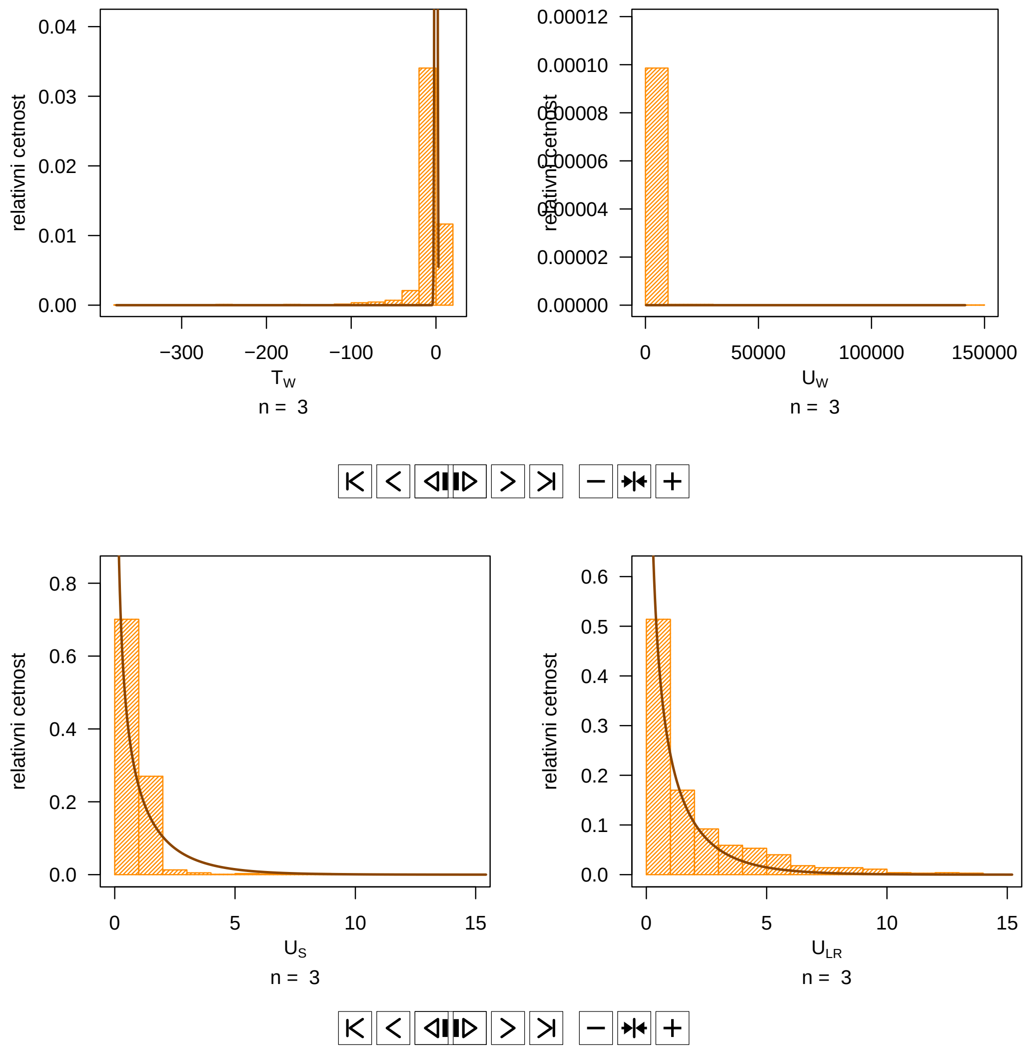


Obrázek 1: χ^2 rozdělení (a) testovací statistiky $F_{W,n-1}$; (b) testovací statistiky $F_{W,n}$

Příklad 6.2. Rozdělení testovacích statistik jednovýběrového testu o rozptylu σ^2
Nechť náhodný výběr X pochází z normálního rozdělení, t.j. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 150$ a $\sigma^2 = 30^2$. Pomocí simulační studie ověřte, že pro test o rozptylu σ^2 platí za platnosti H_0 následující:

1. $T_W = \sqrt{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{n}{F_{W,n}}\right) \sim N(0,1)$;
2. $U_W = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{n}{F_{W,n}}\right)^2 \sim \chi^2_1$;
3. $U_S = \frac{n}{2} \left(\frac{F_{W,n}}{n} - 1\right)^2 \sim \chi^2_1$;
4. $U_{LR} = F_{W,n} - n \left(1 + \ln(\frac{F_{W,n}}{n})\right) \sim \chi^2_1$.

Vygenerujte $M = 1000$ pseudonáhodných výběrů o rozsahu $n = 3$. Pro každý náhodný výběr vypočítejte hodnoty realizací testovacích statistik T_W, U_W, U_S a U_{LR}. Vytvořte histogramy těchto testovacích statistik a superponujte je křivkami příslušného rozdělení. Dále vytvořte animaci, ze které bude zřejmé, jak se s rostoucím n rozdělení testovacích statistik T_W, U_W, U_S a U_{LR} asymptoticky blíží k příslušnému rozdělení. Animaci spravte pro měnící se $n \in \{3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 100, 250, 500\}$.



Obrázek 2: Normální rozdělení testovací statistiky T_W a χ^2 rozdělení testovacích statistik U_W, U_S a U_LR

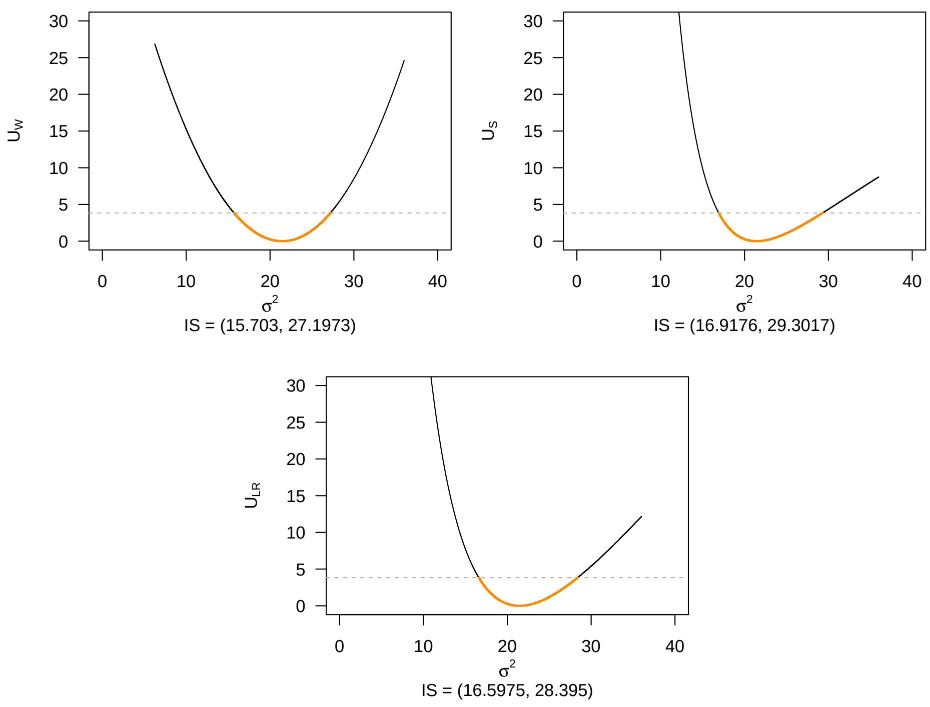
Příklad 6.3. Test o rozptylu σ^2 když μ neznáme; praktický příklad
Z archivních materiálů (Schmidt, 1888) máme k dispozicii původní kraniometrické údaje 215 dospělých mužů a 107 dospělých žen ze starověké egyptské populace basion–bregmatické výšce lebky. Údaje jsou k dispozici v souboru 11-two-samples-means-skull.txt. Současně máme k dispozici průměrné hodnoty basion–bregmatické výšky ($\bar{x}_m = 133.977$ mm; $\bar{x}_f = 126.942$ mm), hodnoty směrodatné odchylky ($s_m = 5.171$ mm; $s_f = 4.430$ mm).

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ otestujte hypotézu o shodě rozptylu výšky lebky starověké ženské egyptské populace s rozptylem výšky lebky novověké ženské egyptské populace. Testování proveďte pomocí (a) kritického oboru, (b) intervalu spolehlivosti, (c) p-hodnoty při použití testovacích statistik (1) $F_{W,n-1}$, (2) U_W, (3) U_S, (4) U_{LR}. Dále vykreslete grafy zobrazující věrohodnostní intervaly spolehlivosti pro test o rozptylu σ^2 získaný na základě testovacích statistik U_W, U_S a U_{LR}.

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ dále otestujte hypotézu o shodě směrodatné odchylky výšky lebky starověké ženské egyptské populace se směrodatnou odchylkou výšky lebky novověké ženské egyptské populace. Testování proveďte pomocí (a) kritického oboru, (b) intervalu spolehlivosti, (c) p-hodnoty při použití testovacích statistik (1) $F_{W,n-1}$, (2) U_W, (3) U_S, (4) U_{LR}.

Tabulka 1: Výsledky testů o rozptylu σ^2 při použití testovacích statistik $F_{W,n-1}$, U_W, U_S a U_{LR}

Statistika	$\widehat{\sigma}^2$	statistika	W_{hh}	W_{dh}	IS$_{dh}$	IS$_{hh}$	p-hodnota
$F_{W,n-1}$	21.6528	116.9533	79.4013	136.3822	16.8292	28.9063	0.4394
U_W	21.6528	0.3875		3.8415	15.7030	27.1973	0.5336
U_S	21.6528	0.4629		3.8415	16.9176	29.3017	0.4963
U_{LR}	21.6528	0.4361		3.8415	16.5975	28.3950	0.5090



Obrázek 3: 95 % Věrohodnostní empirické intervaly spolehlivosti pro test o rozptylu σ^2 získané na základě testovacích statistik U_W, U_S a U_{LR}