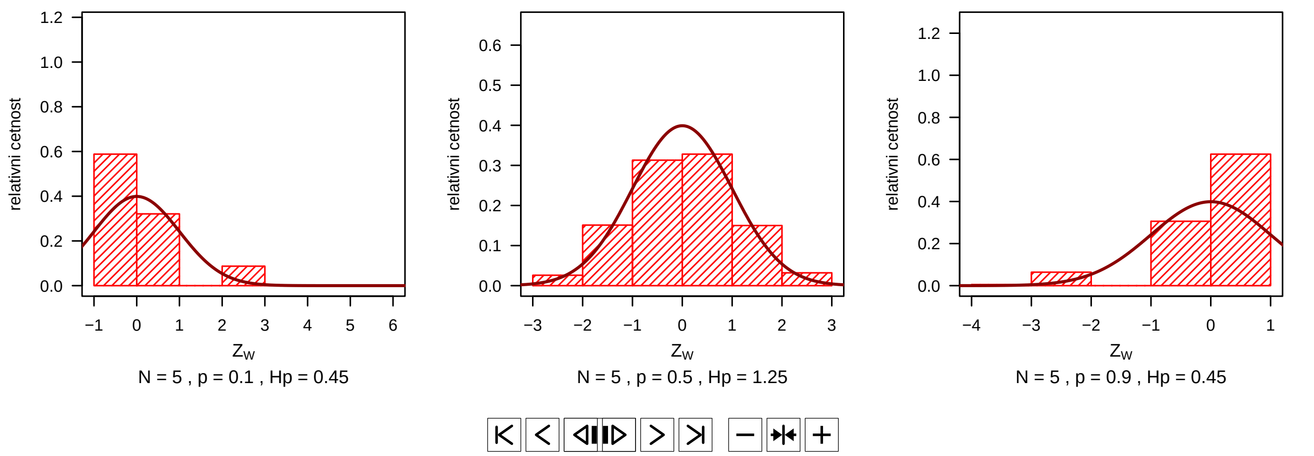
Příklad S0.1. Testovací statistika, simulační studie
Na základě simulační studie prověřte, že pokud má náhodná proměnná X asymptoticky binomické rozdělení $\mathrm{Bin}(N, p)$, potom testovací statistika

$$Z_W = \frac{X/N - p}{\sqrt{p(1-p)/N}}$$

má asymptoticky normální rozdělení $N(0, 1)$. Použijte (a) $p = 0.1$; (b) $p = 0.5$; (c) $p = 0.9$, a $N = 5$, 10, 15, 20, 25, 50, 100 a 200. Okomentujte výsledky ve spojitosti s Haldovou podmínkou $Np(1-p) > 9$. Pro každou simulaci X vypočítejte $z_{W,m}$, $m = 1, 2, \ldots, M$, kde $M = 1000$. Histogram vygenerovaných testovacích statistik v relativní škále superponujte s teoretickou křivkou hustoty Z_W.

V komentářích zhodnoťte, zda je Hladova podmínka dobrým ukazatelem situací, kdy je možné rozdělení testovací statistiky Z_W aproximovat normálním rozdělením $N(0, 1)$, i situací, kdy to naopak není vhodné.



Obrázek 1: Asymptotické normální rozdělení Waldovy testovací statistiky Z_W pro test o pravděpodobnosti

Příklad S0.2. Pravděpodobnost pokrytí Waldova DIS
Nechť $X \sim \text{Bin}(N, p)$, kde $N = 30$ a $p = 0.8$. Při experimentu bylo z $N = 30$ pokusů zanamenáno 24 úspěchů, tj. $x = 24$. Odhad pravděpodobnosti úspěchu $\widehat{p} = \frac{24}{30} = 0.8$. Waldův 95 % empirický DIS pro p je rovný $(d, h) = (0.657, 0.943)$. Vypočítejte pravděpodobnost pokrytí tohoto intervalu.

Poznámka: Pravděpodobnost pokrytí Waldova 95 % DIS pro p vypočítáme následovně:

$$\Pr(\textit{pokryti}) = \sum_j \Pr(X = Np_j : p \in \text{ Waldovu 95 \% DIS pro } p_j),$$

kde $p_j \in \mathcal{M}_J = \{\frac{1}{30}, \frac{2}{30}, \ldots, 1-\frac{1}{30}\}$, t.j. jde o součet takových funkčních hodnot pravděpodobnostní funkce v bodech Np_j, kde $p \in$ Waldovu 95 % DIS pro p_j. Výsledky uspořádejte do tabulky, jejíž sloupce budou x_j, p_j, dh_j (dolní hranice Waldova 95 % DIS pro p_j), hh_j (horní hranice Waldova 95 % DIS pro p_j), $\Pr(X = Npj)$ a $p \in IS_j$ (indikace toho, zda p náleží nebo nenáleží do Waldova 95 % DIS pro p_j).

Celý postup následně zopakujte, tentokrát pro parametr $p = 0.79$. Pozorujte, jak se změnila pravděpodobnost pokrytí.

Tabulka 1: Pravděpodobnost pokrytí Waldova 95 % empirického DIS pro parametr $p = 0.80$, když $\widehat{p} = 0.80$

	x_j	p_j,	dh_j	hh_j	$\Pr(X = Np_j)$	$p \in IS_j$
1	1	0.0333	-0.0309	0.0976	0.0000	0
2	2	0.0667	-0.0226	0.1559	0.0000	0
3	3	0.1000	-0.0074	0.2074	0.0000	0
4	4	0.1333	0.0117	0.2550	0.0000	0
5	5	0.1667	0.0333	0.3000	0.0000	0
6	6	0.2000	0.0569	0.3431	0.0000	0
7	7	0.2333	0.0820	0.3847	0.0000	0
8	8	0.2667	0.1084	0.4249	0.0000	0
9	9	0.3000	0.1360	0.4640	0.0000	0
10	10	0.3333	0.1646	0.5020	0.0000	0
11	11	0.3667	0.1942	0.5391	0.0000	0
12	12	0.4000	0.2247	0.5753	0.0000	0
13	13	0.4333	0.2560	0.6107	0.0000	0
14	14	0.4667	0.2881	0.6452	0.0000	0
15	15	0.5000	0.3211	0.6789	0.0002	0
16	16	0.5333	0.3548	0.7119	0.0007	0
17	17	0.5667	0.3893	0.7440	0.0022	0
18	18	0.6000	0.4247	0.7753	0.0064	0
19	19	0.6333	0.4609	0.8058	0.0161	1
20	20	0.6667	0.4980	0.8354	0.0355	1
21	21	0.7000	0.5360	0.8640	0.0676	1
22	22	0.7333	0.5751	0.8916	0.1106	1
23	23	0.7667	0.6153	0.9180	0.1538	1
24	24	0.8000	0.6569	0.9431	0.1795	1
25	25	0.8333	0.7000	0.9667	0.1723	1
26	26	0.8667	0.7450	0.9883	0.1325	1
27	27	0.9000	0.7926	1.0074	0.0785	1
28	28	0.9333	0.8441	1.0226	0.0337	0
29	29	0.9667	0.9024	1.0309	0.0093	0

Tabulka 2: Pravděpodobnost pokrytí Waldova 95 % empirického DIS pro parametr $p = 0.79$, když $\widehat{p} = 0.80$

	x_j	p_j,	dh_j	hh_j	$\Pr(X = Np_j)$	$p \in IS_j$
1	1	0.0333	-0.0309	0.0976	0.0000	0
2	2	0.0667	-0.0226	0.1559	0.0000	0
3	3	0.1000	-0.0074	0.2074	0.0000	0
4	4	0.1333	0.0117	0.2550	0.0000	0
5	5	0.1667	0.0333	0.3000	0.0000	0
6	6	0.2000	0.0569	0.3431	0.0000	0
7	7	0.2333	0.0820	0.3847	0.0000	0
8	8	0.2667	0.1084	0.4249	0.0000	0
9	9	0.3000	0.1360	0.4640	0.0000	0
10	10	0.3333	0.1646	0.5020	0.0000	0
11	11	0.3667	0.1942	0.5391	0.0000	0
12	12	0.4000	0.2247	0.5753	0.0000	0
13	13	0.4333	0.2560	0.6107	0.0000	0
14	14	0.4667	0.2881	0.6452	0.0001	0
15	15	0.5000	0.3211	0.6789	0.0003	0
16	16	0.5333	0.3548	0.7119	0.0011	0
17	17	0.5667	0.3893	0.7440	0.0034	0
18	18	0.6000	0.4247	0.7753	0.0091	0
19	19	0.6333	0.4609	0.8058	0.0217	1
20	20	0.6667	0.4980	0.8354	0.0449	1
21	21	0.7000	0.5360	0.8640	0.0805	1
22	22	0.7333	0.5751	0.8916	0.1239	1
23	23	0.7667	0.6153	0.9180	0.1621	1
24	24	0.8000	0.6569	0.9431	0.1778	1
25	25	0.8333	0.7000	0.9667	0.1605	1
26	26	0.8667	0.7450	0.9883	0.1161	1
27	27	0.9000	0.7926	1.0074	0.0647	0
28	28	0.9333	0.8441	1.0226	0.0261	0
29	29	0.9667	0.9024	1.0309	0.0068	0

Tabulka 3: Pravděpodobnost pokrytí Waldova 95 % empirického DIS pro parametr p

	$p = 0.8$	$p = 0.79$
pravděpodobnost pokryti	0.9463	0.8876

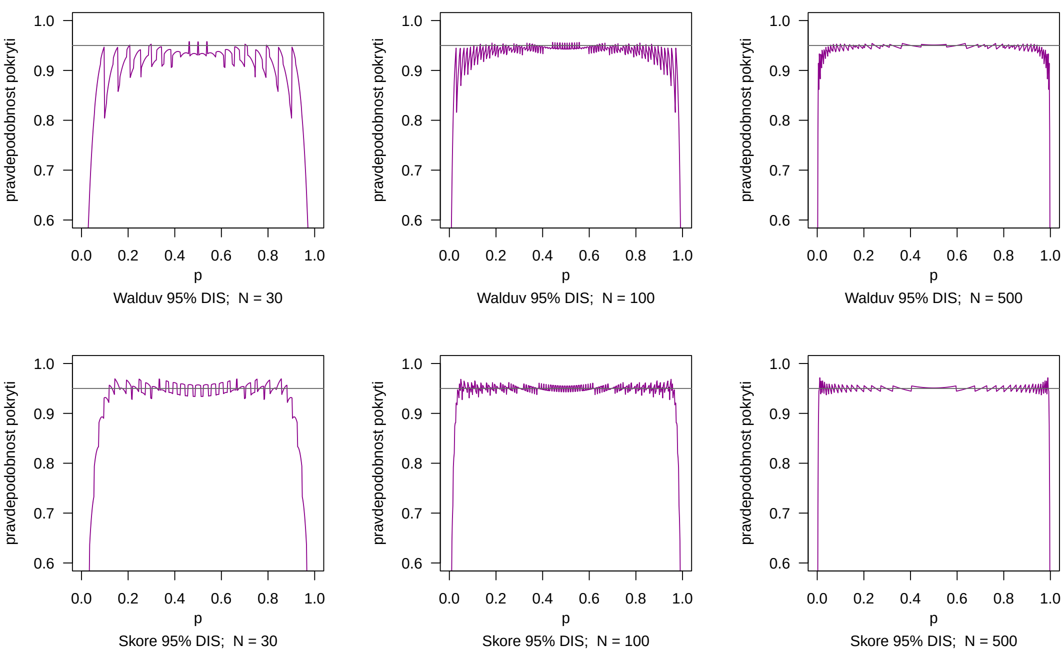
Příklad S0.3. Pravděpodobnost pokrytí Waldova, skóre a věrohodnostního DIS
Nechť $X_i \sim \text{Bin}(N, p_i)$, $p_i \in \{0.001, 0.003, \ldots, 0.997, 0.999\}$. Vypočítejte pravděpodobnosti pokrytí (a) Waldova, (b) skóre, (c) věrohodnostního 95 % empirického oboustranného intervalu spolehlivosti pro každé p_i. Nakreslete obrázek, kde na ose x budou p_i a na ose y bude pravděpodobnost pokrytí $\text{Pr}_i(\text{pokrytí})$. Zvolte (i) $N = 30$, (ii) $N = 100$, (iii) $N = 500$.

Poznámka: Pravděpodobnosti pokrytí 95 % DIS pro p_i vypočítáme následovně

$$\text{Pr}_i(\text{pokrytí}) = \sum_j \text{Pr}(X = Np_j : p_i \in 95\,\%\text{ DIS pro } p_j),$$

kde $p_j \in \mathcal{M}_J = \{\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, 1 - \frac{1}{N}\}$, t.j. jde o součet takových funkčních hodnot pravděpodobnostní funkce v bodech Np_j, kde $p_i \in 95\,\%$ DIS pro p_j.

Zopakujte si definici konzervativního a liberálního IS (viz S02). V komentářích uveďte, zda je (a) Waldův; (b) skóre; (c) věrohodnostní DIS pro parametr p konzervativní, liberální, nebo ani jedno. Dále všechny tři DIS vzájemně porovnejte a uveďte, který DIS je z hlediska pravděpodobnosti pokrytí nejvhodnějším intervalovým odhadem parametru p a který je naopak nejméně vhodný.



Obrázek 2: Pravděpodobnost pokrytí Waldových, skóre a věrohodnostních empirických intervalů spolehlivosti pro parametr p binomického rozdělení

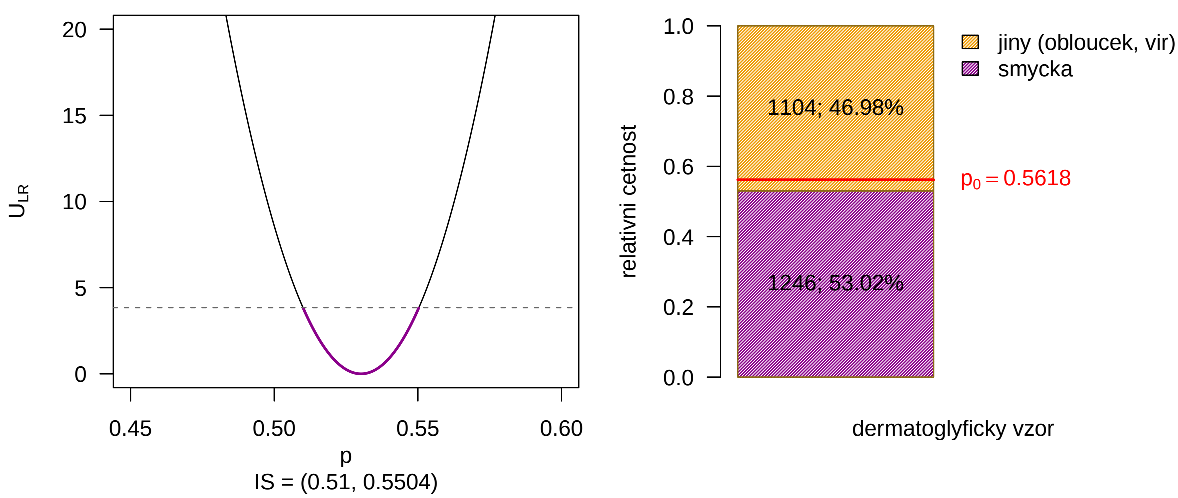
Příklad S0.4. Test o pravděodobnosti p; praktický příklad
Mějme datový soubor 25-one-sample-probability-dermatoglyphs.txt obsahující údaje o frekvenci výskytu dermatoglyfických vzorů *vír* (whorl), *smyčka* (loop) a *oblouček* (arch) na deseti prstech 470 jedinců (235 mužů a 235 žen) populace Bagathů z Araku Valley. Současně máme k dispozici hodnotu pravděpodobnosti výskytu dermatoglyfického vzoru *smyčka* u jedinců z populace Lambadis ($p_m = 0.5618$, $p_f = 0.6233$).

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ zjistěte, zda existuje rozdíl mezi frekvencemi výskytu dermatoglyfického vzoru *smyčka* u mužů bagathské populace z Araku Valley a mužů z populace Lambadis. Před testováním ověřte splnění Haldovy podmínky dobré aproximace. Testování proveďte pomocí (a) kritického oboru; (b) intervalu spolehlivosti; (c) p-hodnoty při použití testovacích statistik (1) Z_W, (2) U_S, (3) U_{LR}. Vykreslete graf zobrazující hranice a oblast 95 % empirického věrohodnostního intervalu spolehlivosti pro test o parametru p. Nakonec vykreslete sloupcový diagram relativních četností výskytu vzoru smyčka v populaci bagathských mužů z Araku Valley. U každého typu testování (a)–(c) pro každý test (1)–(3) uveďte zdůvodněný závěr o H_0 a nakonec uveďte antopologickou interpretaci výsledku testování.

Poznámka: Při testování H_0 ověřujeme podmínku dobré aproximace ve tvaru $Np(1-p) > 9$, kde za p dosazujeme hodnotu p_0 z nulové hypotézy H_0.

Tabulka 4: Výsledky testu o pravděpodobnosti p při použití testovacích statistik Z_W, U_S a U_{LR}

Statistika	$\widehat{p}$	statistika	W_{hh}	W_{dh}	IS_{dh}	IS_{hh}	p-hodnota
Z_W	0.5302	-3.0681	-1.9600	1.9600	0.5100	0.5504	0.0011
U_S	0.5302	9.5244		3.8415	0.5100	0.5503	0.0020
U_{LR}	0.5302	9.4808		3.8415	0.5100	0.5504	0.0021



Obrázek 3: 95 % věrohodnostní empirický interval spolehlivosti pro test o pravděpodobnosti p získaný na základě testovací statistiky U_{LR} (vlevo); sloupcový diagram relativných četností (vpravo)