Testy o parametru lambda

Mgr. Zdeňka Geršlová

Příklad 1

Rozdělení testovací statistiky F_W

Na základě simulační studie prověřte, zda za předpokladu, že

(a) $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$, kde $\lambda = 1.2$;
(b) $X \sim p\text{Poiss}(\lambda) + (1-p)\text{Poiss}(\lambda_2)$, kde $\lambda = 1.2$, $\lambda_2 = 2.6$, $p = 0.9$;
(c) $X \sim \text{NegBin}(k, p)$, kde $k = 1.3$ a $p = 0.5$;
(d) $X \sim \text{Bin}(N, p)$, kde $N = 15$ a $p = 0.09$;

platí, že
(1) $Z_W = \frac{\bar{X}-\lambda_0}{\sqrt{\bar{X}/N}} \sim N(0,1)$;
(2) $U_S = \frac{(\bar{X}-\lambda_0)^2}{\lambda_0/N} \sim \chi^2_1$;
(3) $U_{LR} = 2N\left(\bar{x}\ln\frac{\bar{x}}{\lambda_0} - \bar{x} + \lambda_0\right) \sim \chi^2_1$.

Pro každou simulaci náhodného výběru X_m o rozsahu $n = 50$ vypočítejte (a) $Z_{W,poz,m}$; (b) $U_{S,poz,m}$; (c) $U_{LR,poz,m}$, $m = 1, 2, \ldots, M$, kde $M = 1000$ a vykreslete histogramy těchto testovacích statistik v relativní škále. Každý histogram superponujte teoretickou křivkou hustoty příslušného rozdělení. Nakonec spočítejte empirickou pravděpodobnost pokrytí (spolehlivost) $1 - \hat{\alpha}$ každého testu, a to jako počet testovacích statistik, které nenáleží do kritického oboru $\mathcal{W}$, dělený počtem simulací M. U každého testu (1)–(3) následně rozhodněte, zda je pro danou situaci (a)–(d) konzervativní, liberální, nebo ani jedno.

Vytvořte animaci demonstrující případnou konvergenci rozdělení testovacích statistik Z_W, U_S a U_{LR} k příslušnému rozdělení při rostoucí hodnotě rozsahu n. Hodnoty n volte $n = 10, 25, 50, 100, 200, 500$.

Postup

- Jednou z možností je vytvořit funkci `HistLambda`, která pro dané vstupní parametry rozdělení vygeneruje histogramy superponované křivkou teoretické hustoty pro všechny 3 typy statistik vedle sebe. Aby funkce byla komplexní pro všechna vstupní rozdělení, přidáme argument `distr`, pomocí kterého budeme volit konkrétní rozdělení z možností (a)-(d). V takovém případě je potom nutné mít ve vstupech také všechny jednotlivé parametry všech požadovaných rozdělení.
- Jinou možností je vygenerovat data samostatně a ve funkci `HistLambda` mít potom jako vstupní parametr právě matici vygenerovaných dat.
- Uvnitř funkce potom postupujeme analogicky předchozím cvičením - spočítáme jednotlivé typy statistik a vykreslíme jednotlivé histogramy superponované křivkami teoretických hustot.
- Uvnitř funkce také spočítáme pravděpodobnost pokrytí dle zadání, tj. jako počet test. statistik, které nepatří do kritického oboru.

Generování dat

- Data pocházející z jednotlivých rozdělení vygenerujeme tak, jak jsme zvyklí. Pro směs Poisson. rozdělení je možný způsob uveden níže.

```
## smisene Poisson. rozdeleni s parametry lambda, lambda2 a poisp
X <- matrix(NA, M, N)
    for(i in 1:M){
      bin <- rbinom(N, 1, poisp)
      X[i,][bin == 1] <- rpois(sum(bin == 1), lambda)
      X[i,][bin == 0] <- rpois(sum(bin == 0), lambda2)
    }
```

```
HistLambda <- function(lambda0 = 1.2, lambda = 1.2, poisp = 0.9,
                       lambda2 = 2.6, negk = 1.3, negp = 0.5,
                       binN = 15, binp = 0.09,
                       M = 1000, N = 50, distr = 'poiss',
                       alpha = 0.05, cex = 0.8){
  if(distr == 'poiss') {
    X <- ...
    main <- bquote(paste('X ~ Poiss(', lambda == .(lambda), ')'))
  }
  ... # dalsi rozdeleni analogicky
```

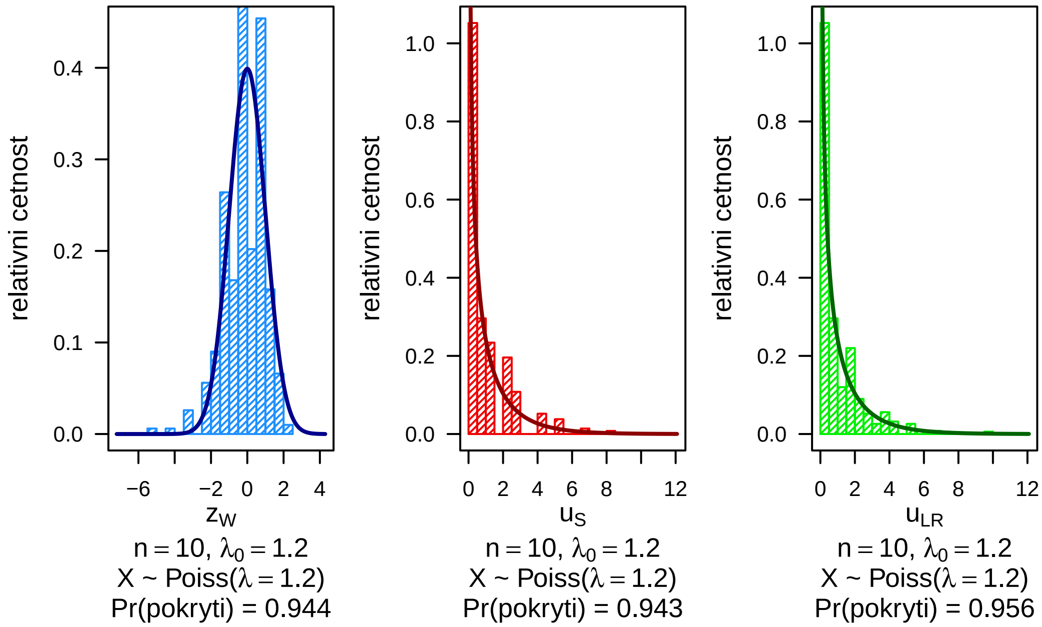
```
  m  <- apply(X, 1, mean)
  zW <- ...
  uS <- ...
  uLR <- ...

  ## pravdepodobnosti pokryti
  pp_zW <- 1 - sum(abs(zW) > qnorm(1 - alpha / 2)) / M
  pp_uS <- 1 - sum(abs(uS) > qchisq(1 - alpha, 1)) / M
  pp_uLR <- 1 - sum(abs(uLR) > qchisq(1 - alpha, 1)) / M

    hist(...)
    hist(...)
    hist(...)
}
```

Popis histogramu

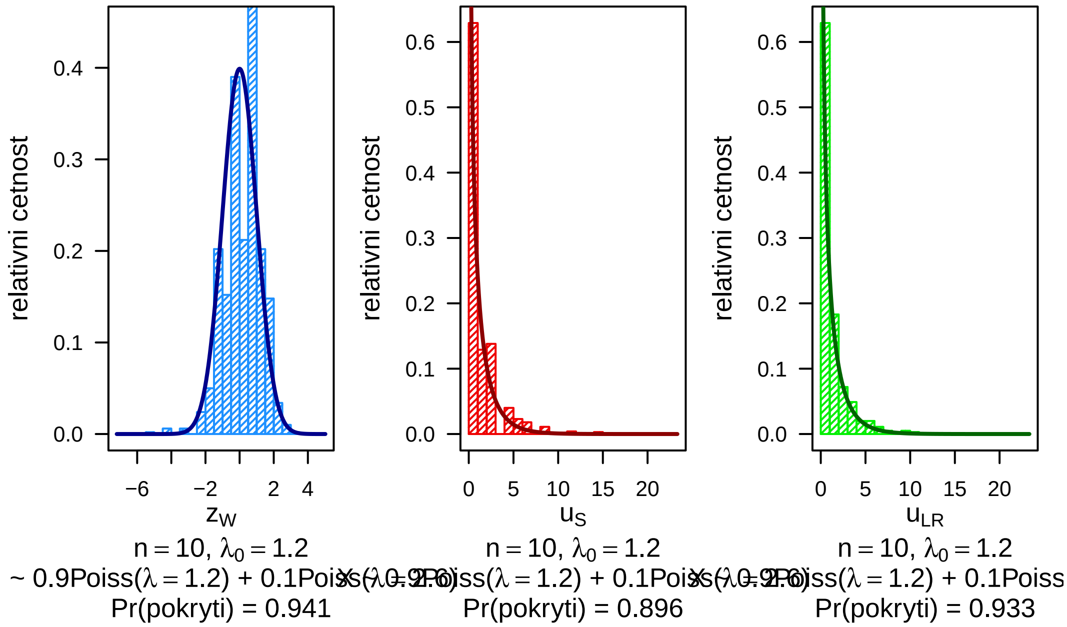
```
# priklad popisu histogramu
mtext('relativni cetnost', side = 2, line = 3, cex = cex)
mtext(expression(z[W]), side = 1, line = 2.2, cex = cex)
mtext(bquote(paste(n == .(N), ', ', lambda[0] == .(lambda0))),
          side = 1, line = 3.6, cex = cex)
mtext(main, side = 1, line = 4.8, cex = cex)
mtext(bquote(paste('Pr(pokryti) = ', .(round(pp.zW, 4)))),
          side = 1, line = 6, cex = cex)

lines(...)
```

Pozn.: Nezapomeňte, že při generování posloupnosti pro teoretickou hustotu musíte postupovat jinak pro rozdělení Waldovy TS (která je asymptoticky normální) a jinak pro skóre a věrohodnostní TS (asymptoticky chí kvadrát rozdělení).

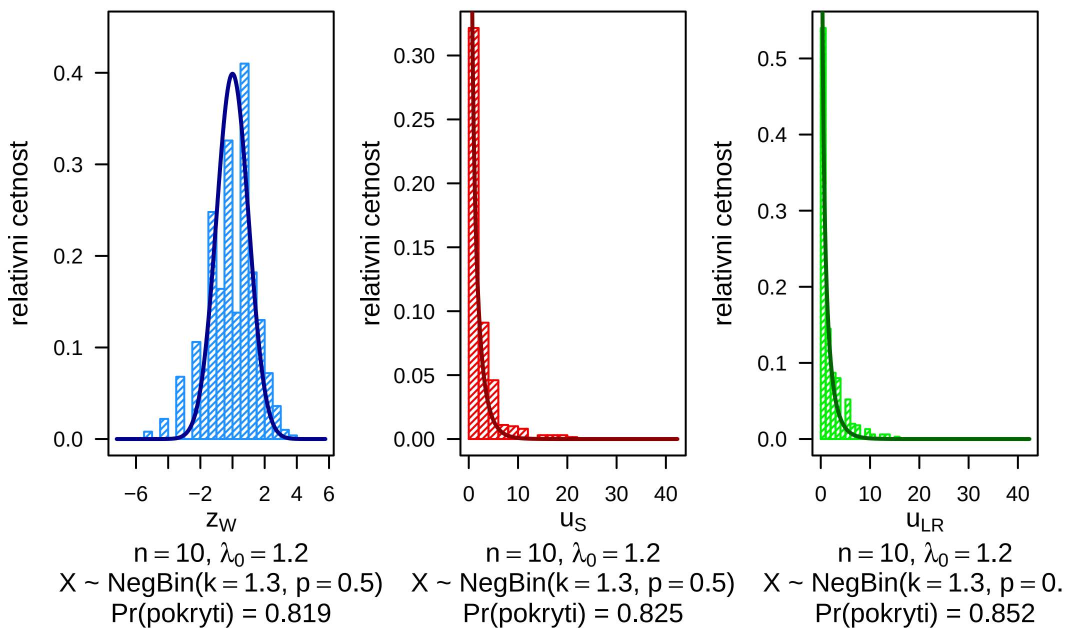
Výsledky (a) Poissonovo rozdělení



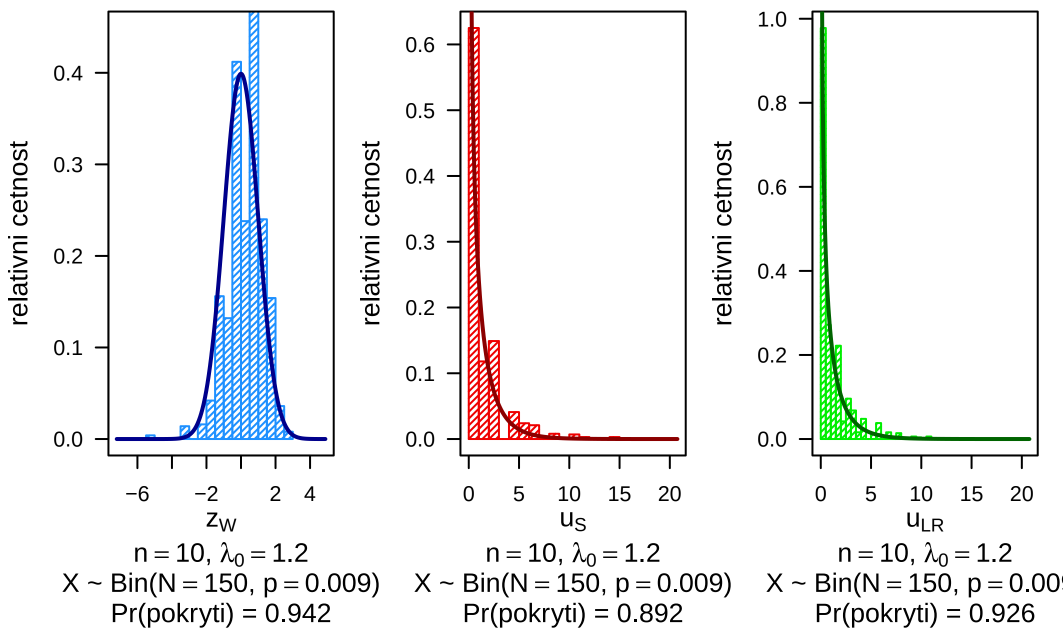
Výsledky (b) směs Poisson. rozdělení



Výsledky (c) negativně binomické rozdělení



Výsledky (d) binomické rozdělení



Vyhodnocení

V případě Z_W statistiky je z animací vidět, že předpoklad o normálním rozdělení této statistiky platí pouze v případě, že náhodná veličina X pochází opravdu z Poissonova rozdělení.

V ostatních případech dostáváme nesprávné odhady λ i $\text{var}(\lambda)$ a teoretická hustota nebude superponovat histogram test. statistiky.

Praktický příklad

Test o parametru λ Poissonova rozdělení

Nechť početnosti úmrtí X jako následek kopnutí koněm v Pruských armádních jednotkách (Bortkiewicz, 1898) mají Poissonovo rozdělení s parametrem λ, tj. $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$. Pravděpodobnost, že někdo bude smrtelně zraněný v daném dni, je extrémně malá. Mějme 10 vojenských jednotek za 20-letou periodu (rozsah $M = 10 \times 20 = 200$), kde, při početnostech úmrtí $n = 1, 2, 3, 4, 5+$ v dané jednotce a v daném roce, zaznamenáváme také početnosti vojenských jednotek m_n při daném n, kde $M = \sum m_n = 200$ (viz tabulka).

n	0	1	2	3	4	5+
m_n	109	65	22	3	1	0

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte nulovou hypotézu $H_0 : \lambda = 0.6$ oproti alternativní hypotéze $H_{11} : \lambda \neq 0.6$.
K testování použijte
(1) Waldovu testovací statistiku Z_W;
(2) skóre testovací statistiku U_S;
(3) věrohodnostní testovací statistiku U_{LR}.

Testování proveďte pomocí (i) kritického oboru, (ii) intervalu spolehlivosti, (iii) p-hodnoty. Dále vykreslete graf 95 % věrohodnostního empirického DIS pro parametr λ.

Hranice IS

- Waldův: $\bar{x} \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}}{N}}$
- skóre: $\bar{x} + \frac{1}{2}\frac{u^2_{\alpha/2}}{N} \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{N}\left(\bar{x} + \frac{u^2_{\alpha/2}}{4N}\right)}$
- věrohodnostní: $\{\lambda_0 : U_{LR} \leq \chi^2_1(\alpha)\}$

Postup

- analogicky praktickým příkladům z předchozích cvičení zadáme data dle tabulky a podle vzorců spočítáme jednotlivé statistiky, kritické obory, IS a p-hodnoty a výsledky zapíšeme formou tabulky

Výsledná tabulka

	statistika	W_{hh}	W_{dh}	IS_{dh}	IS_{hh}	p-hodnota
Wald	0.181	-1.96	1.960	0.502	0.718	0.856
Skóre	0.033	NA	3.841	0.511	0.728	0.855
Věrohodnost	0.033	NA	3.841	0.508	0.725	0.856

Vyhodnocení: Protože hodnota test. statistiky …. je/není uvnitř kritického oboru ….., zamítáme/nezamítáme H_0 o tom, že $\lambda = 0.6$.

Protože hodnota …. spadá/nespadá do IS: ……………………………., zamítáme/nezamítáme H_0.

Protože p-hodnota ………… je větší/menší než ………….., zamítáme/nezamítáme H_0.

Náhodná veličina X popisující počet úmrtí v důsledku kopnutí koněm v Pruských armádních jednotkách pochází z Poissonova rozdělení s parametrem λ, který je/není statisticky významně odlišný od hodnoty 0.6.

Věrohodnostní IS

- pro vykreslení použijeme např. sekvenci `lambda0i <- seq(0.2, 1, length = 1024)`, dále je postup analogický předchozím cvičením