Test o podílu rozptylů

Mgr. Zdeňka Geršlová

Praktický příklad podíl rozptylů

Test o podílu rozptylů σ_1^2/σ_2^2

Z archivních materiálů (Schmidt, 1888) máme k dispozicii původní kraniometrické údaje o největší výšce mozkovny (`skull.pH`) a morfologické výšce tváře (`face.H`) u 164 mužů a 78 žen starověké egyptské populace. Data jsou uvedena v souboru {`05-two-sample-variance.txt`}.
Na hladině významnosti $\alpha = 0.10$ testujte hypotézu
(a) o shodě rozptylů největší výšky mozkovny starověké ženské a starověké mužské egyptské populace;
(b) o shodě rozptylů morfologické výšky tváře starověké ženské a starověké mužské egyptské populace.

K testování použijte
(1) dvouvýběrový F-test o podílu rozptylů,
(2) test poměrem věrohodnosti.

Testování proveďte pomocí (i) kritického oboru, (ii) intervalu spolehlivosti, (iii) p-hodnoty. Před testováním vždy ověřte předpoklad normality obou náhodných výběrů. Dále vykreslete graf zobrazující věrohodnostní interval spolehlivosti pro podíl σ_1^2/σ_2^2 získaný na základě U_{LR} testovací statistiky.

Načtení dat a testy normality

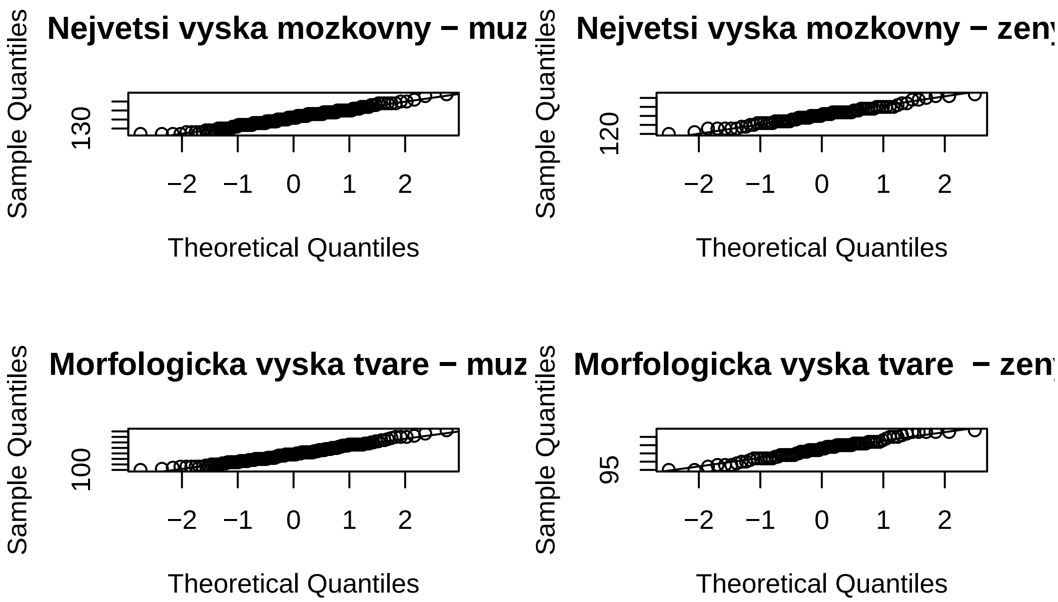
- nejprve načteme data (popř. odstraníme NA hodnoty, je-li to třeba) a spočítáme odhady rozptylů pro jednotlivé proměnné a pohlaví

	s_m^2	s_f^2	s_m^2/s_f^2
skull.pH	21.13871	23.47336	0.9005405
face.H	51.43678	33.82418	1.5207105

	s_m^2	s_f^2	s_m^2/s_f^2

Testy normality

- Provedeme testování předpokladu normality pro každou proměnnou a každé pohlaví zvlášť



Pozn.: Přestože Lillieforsův test pro výšku tváře mužů normalitu zamítá, podle grafů vidíme, že porušení normality není velké, budeme tedy data považovat za pocházející z normálního rozdělení.

Vzorce Waldova testu

Realizace test. statistiky $f_W = \frac{s_1^2}{s_2^2}$,
kde $s_j, j = 1, 2$ jsou odhady rozptylů (neboť skutečné rozptyly neznáme).

Kritické hodnoty Waldova testu:
$F_{n_1-1,n_2-1}(1-\alpha/2)$ a $F_{n_1-1,n_2-1}(\alpha/2)$

Hranice IS:
$dh = \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{n_1-1,n_2-1}(1-\alpha/2)}$

$hh = \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{n_1-1,n_2-1}(\alpha/2)}$

Věrohodnostní test

$$u_{LR} = n_1 \ln\left(\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{s_1^2(n_1+n_2)}\right) + n_2 \ln\left(\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{s_2^2(n_1+n_2)}\right)$$

Platí: $U_{LR} \sim \chi^2_1$.

Hranice věrohodnostního IS opět určíme pomocí funkce `uniroot`. Pro nastavení hraničních bodů uvnitř funkce `uniroot` lze pro dolní hranici IS použít např. hodnoty $(0, s_1^2/s_2^2)$ a pro horní hranici např. $(s_1^2/s_2^2, hh_W + 0.5)$, kde hh_W je horní hranice Waldova IS.

Postup

- Postup je analogický příkladům z minulých cvičení. Protože chceme testovat případy (a) i (b), můžeme si vytvořit jednu funkci, jejímž výstupem budou výsledky jak Waldova, tak věrohodnostního testu pro zadané vstupní parametry (těmi budou jednotlivé vektory dat, hladina významnosti a příp. další doprovodné parametry k vykreslení grafu, pokud chceme, aby funkce rovnou i vykreslovala intervaly spolehlivosti)
- pro Waldův test lze rovněž použít funkci `var.test()`

Výsledné tabulky

Table 2: Výsledky pro největší výšku mozkovny

	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	statistika	$\mathcal{W}_{hh}$	$\mathcal{W}_{dh}$	IS_{dh}	IS_{hh}	p-hodnota
F-test	21.139	23.473	0.901	0.732	1.397	0.645	1.231	0.575
U_{LR} test	21.139	23.473	0.294	NA	2.706	0.650	1.233	0.588

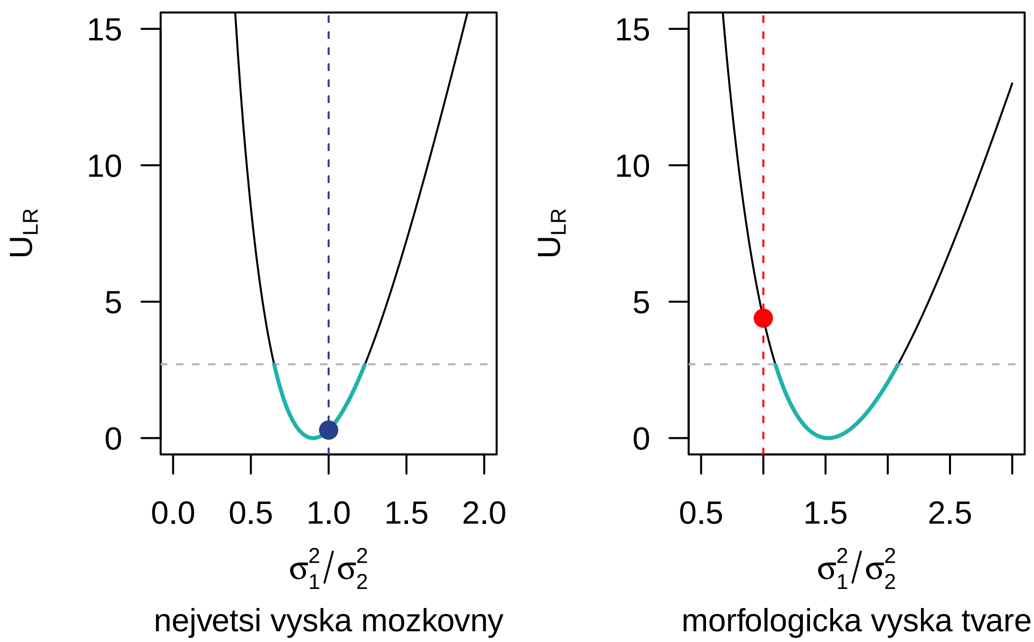
Table 3: Výsledky pro morfologickou výšku tváře

	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	statistika	$\mathcal{W}_{hh}$	$\mathcal{W}_{dh}$	IS_{dh}	IS_{hh}	p-hodnota
F-test	51.437	33.824	1.521	0.732	1.397	1.089	2.078	0.040
U_{LR} test	51.437	33.824	4.396	NA	2.706	1.097	2.083	0.036

Jaký bude závěr o zamítnutí/nezamítnutí H_0 v případě jednotlivých proměnných?

Vykreslení věrohodnostních IS

- při vykreslování postupujeme stejně jako u předchozích příkladů, na ose x budeme mít podíl rozptylů a do grafu přidáme svislou čáru v bodě 1 (tj. případ shodných rozptylů) a bod v místě protnutí této čáry s věrohodnostní funkcí, které budou mít modrou/červenou barvu podle toho, zda je bod uvnitř/vně IS



Praktický příklad rozdíl korelačních koeficientů

Mějme data `two-samples-correlations-trunk.txt`, ve kterých máme pro muže a ženy k dispozici záznamy o délce dolní končetiny (proměnná `lowex.L`) a délce trupu (proměná `tru.L`), obojí měřeno v mm. Předpokládáme, že proměnné mají normální rozdělení $N_2(\mu_j, \Sigma_j)$, kde $j = 1, 2$ představují muže a ženy.

(a) Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ otestujte nulovou hypotézu o shodě korelačního koeficientu ρ_1 and ρ_2 oproti oboustrané alternativě.

(b) Dále vypočítejte $100 \times (1 - \alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro $\rho_1 - \rho_2$, kde pravděpodobnost pokrytí (koeficient spolehlivosti) je rovna $1 - \alpha = 0.95$.

Použijte

(1) Waldovu statistiku $Z_{\mathrm{W}} = \dfrac{Z_1 - Z_2 - \xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}}$, kde $\xi_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$ a $Z_j = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R_j}{1-R_j}$

(2) test. statistiku poměrem věrohodnosti $U_{\mathrm{LR}} = \sum_{j=1}^{2} n_j \ln\frac{(1-\hat\rho\hat\rho_j)^2}{(1-\hat\rho^2)(1-\hat\rho_j^2)}$, kde

$\hat\rho$ je iteračním řešením rce $\sum_{j=1}^{2}\frac{n_j(\hat\rho_j-\hat\rho)}{1-\hat\rho_j\hat\rho} = 0$ a

(3) interval spolehlivosti příslušný (1), vzorce viz str. 204 v knize.

Postup

Protože hodnoty ρ_1, ρ_2 neznáme, musíme je odhadnout pomocí výběrových korel. koeficientů. Dostáváme $r_1 = 0.0597578$, $r_2 = 0.285256$ a tedy $r_1 - r_2 =$ -0.2254981.

- Pro výpočet statistik je dobré si uvědomit platnost vztahu $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, přitom $\tanh^{-1}$ zadáváme v R jako `atanh()`.
- Iterační řešení rovnice pro nalezení $\hat\rho$ provedeme opět pomocí funkce `uniroot`:

```
RhoHat <- function(kor, kor_m, kor_f, n_m, n_f) {
  ... # vzorec iteracni rovnice
}
uniroot(RhoHat, interval = c(-0.5, 0.5),
             ...)$root
```

Výsledky

Table 4: Test o rozdílu korel. koeficientů

	statistika	$\mathcal{W}_{hh}$	$\mathcal{W}_{dh}$	p-hodnota
Wald	-1.501	-1.96	1.960	0.133
ULR	2.332	NA	3.841	0.127

Hranice Waldova IS: -0.4918157, 0.0712014

Závěr: Na hladině významnosti ... na základě .... zamítáme/nezamítáme H_0 o tom, že rozdíl korelačních koeficientů mezi sledovanými proměnnými pro muže a pro ženy je roven 0.