S9 Test o parametru λ Poissonova rozdělení

Příklad S9.1. Rozdělení testovací statistiky F_W
Na základě simulační studie prověřte, zda za předpokladu, že

a) $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$, kde $\lambda = 1.2$;

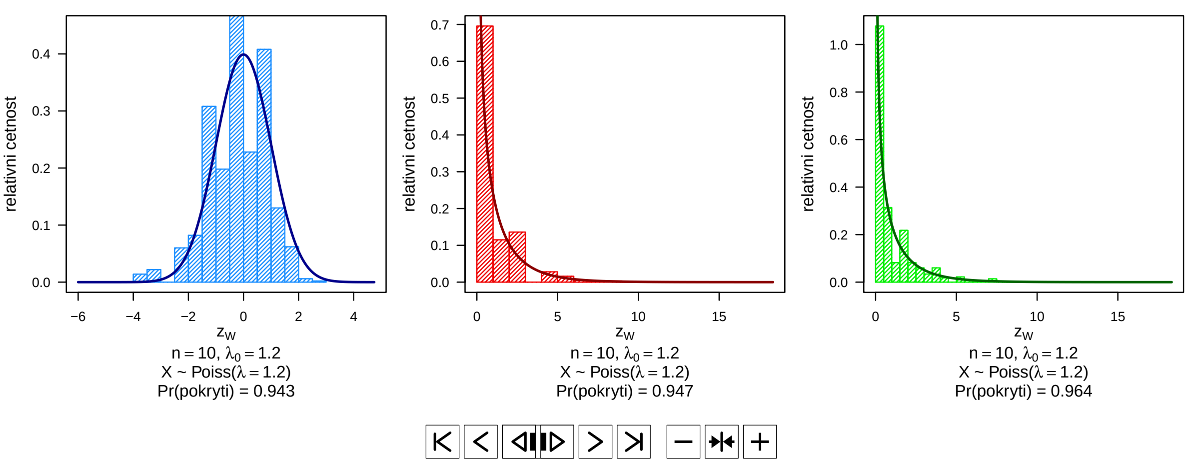
b) $X \sim p\text{Poiss}(\lambda) + (1-p)\text{Poiss}(\lambda_2)$, kde $\lambda = 1.2$, $\lambda_2 = 2.6$, $p = 0.9$;

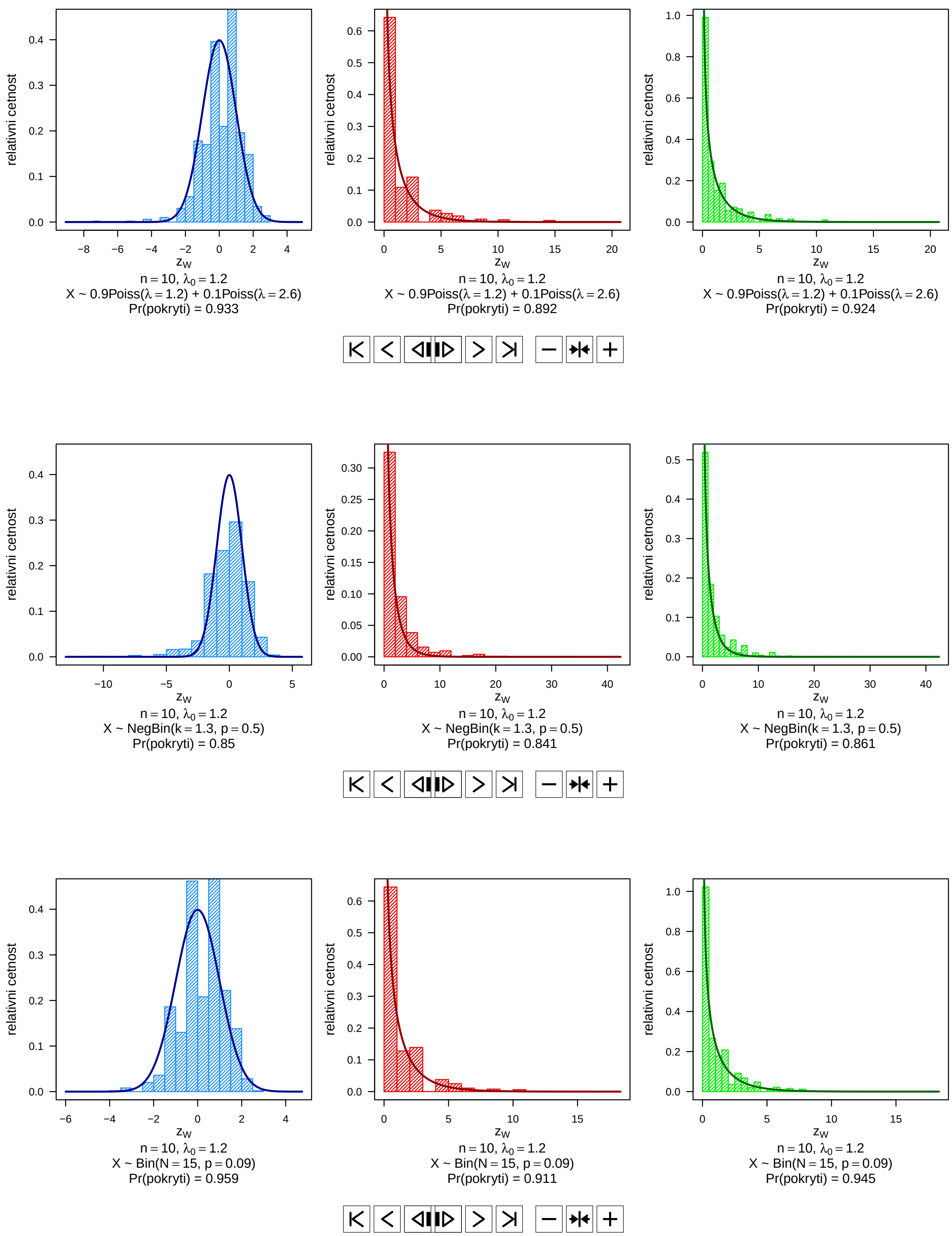
c) $X \sim \text{NegBin}(k, p)$, kde $k = 1.3$ a $p = 0.5$;

d) $X \sim \text{Bin}(N, p)$, kde $N = 15$ a $p = 0.09$;

platí, že (a) $Z_W = \frac{\bar{X}-\lambda_0}{\sqrt{\bar{X}/N}} \sim N(0,1)$; (b) $U_S = \frac{(\bar{X}-\lambda_0)^2}{\lambda_0/N} \sim \chi^2_1$; (c) $U_{LR} = 2N\left(\bar{x}\ln\frac{\bar{x}}{\lambda_0} - \bar{x} + \lambda_0\right) \sim \chi^2_1$. Pro každou simulaci náhodného výběru X_m o rozsahu $n = 50$ vypočítejte (a) $Z_{W,poz,m}$; (b) $U_{S,poz,m}$; (c) $U_{LR,poz,m}$, $m = 1, 2, \ldots, M$, kde $M = 1000$ a vykreslete histogramy těchto testovacích statistik v relativní škále. Každý histogram superponujte teoretickou křivkou hustoty příslušného rozdělení. Nakonec spočítejte empirickou pravděpodobnost pokrytí (spolehlivost) $1 - \widehat{\alpha}$ každého testu, a to jako počet testovacích statistik, které nenáleží do kritického oboru $\mathcal{W}$, dělený počtem simulací M. U každého testu (1)–(3) následně rozhodněte, zda je pro danou situaci (a)–(d) konzervativní, liberální, nebo ani jedno.

Vytvořte animaci demonstrující případnou konvergenci rozdělení testovacích statistik Z_W, U_S a U_{LR} k příslušnému rozdělení při rostoucí hodnotě rozsahu n. Hodnoty n volte $n = 10, 25, 50, 100, 200, 500$.





Obrázek 1: Rozdělení testovacích statistik Z_W, U_S a U_{LR} pro parametr λ Poissonova rozdělení za předpokladu, že data pochází ze (a) Poissonova rozdělení; (b) smíšeného Poissonova rozdělení; (c) negativně binomického rozdělení; (d) binomického rozdělení

Příklad S9.2. Test o parametru λ Poissonova rozdělení; praktický příklad
Nechť početnosti úmrtí X jako následek kopnutí koněm v Pruských armádních jednotkách (Bortkiewicz, 1898) mají Poissonovo rozdělení s parametrem λ, tj. $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$. Pravděpodobnost, že někdo bude smrtelně zraněný v daném dni, je extrémně malá. Mějme 10 vojenských jednotek za 20-letou periodu (rozsah $M = 10 \times 20 = 200$), kde, při početnostech úmrtí $n = 1, 2, 3, 4, 5+$ v dané jednotce a v daném roce, zaznamenáváme také početnosti vojenských jednotek m_n při daném n, kde $M = \sum m_n = 200$ (viz tabulka 1).

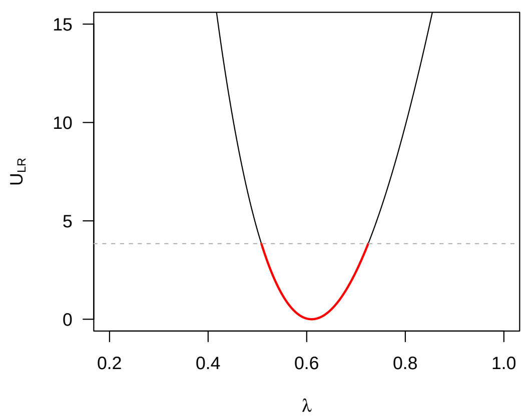
Tabulka 1: Tabulka početností smrtelných úrazů v Pruských armádních jednotkách

n	0	1	2	3	4	5+
m_n	109	65	22	3	1	0

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte nulovou hypotézu $H_0 : \lambda = 0.6$ oproti alternativní hypotéze $H_{11} : \lambda \neq 0.6$. K testování použijte (1) Waldovu testovací statistiku Z_W; (2) skóre testovací statistiku U_S; (3) věrohodnostní testovací statistiku U_{LR}. Testování proveďte pomocí (i) kritického oboru, (ii) intervalu spolehlivosti, (iii) p-hodnoty. Dále vygreslete graf 95 % věrohodnostního empirického DIS pro parametr λ.

Tabulka 2: Výsledky Waldova, skóre a věrohodnostního testu o parametru λ Poissonova rozdělení

	$\widehat{\lambda}$	statistika	$\mathcal{W}_{hh}$	$\mathcal{W}_{dh}$	IS$_{dh}$	IS$_{hh}$	p-hodnota
Waldův přístup	0.6100	0.1811	-1.9600	1.9600	0.5018	0.7182	0.8563
Skóre přístup	0.6100	0.0333		3.8415	0.5109	0.7283	0.8551
Věrohodnostní přístup	0.6100	0.0331		3.8415	0.5081	0.7247	0.8555



Obrázek 2: Hranice 95% věrohodnostního DIS pro parametr λ Poissonova rozděleni