Testy o rozptylu

Mgr. Zdeňka Geršlová

Praktický příklad

Test o rozptylu σ^2 když μ neznáme

Z archivních materiálů (Schmidt, 1888) máme k dispozici původní kraniometrické údaje 215 dospělých mužů a 107 dospělých žen ze starověké egyptské populace o basion–bregmatické výšce lebky. Údaje jsou k dispozici v souboru `two-samples-means-skull.txt`. Současně máme k dispozici průměrné hodnoty basion–bregmatické výšky ($\bar{x}_m = 133.977$,mm; $\bar{x}_f = 126.942$,mm) a směrodatné odchylky ($s_m = 5.171$,mm; $s_f = 4.430$,mm) pro novověkou egyptskou populaci.

(A) Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ otestujte hypotézu o shodě rozptylu výšky lebky starověké ženské egyptské populace s rozptylem výšky lebky novověké ženské egyptské populace. Testování proveďte pomocí

(a) kritického oboru,

(b) intervalu spolehlivosti,

(c) p-hodnoty při použití testovacích statistik (1) $F_{W,n-1}$, (2) U_W, (3) U_S, (4) U_{LR}.

Dále vykreslete grafy zobrazující věrohodnostní intervaly spolehlivosti pro test o rozptylu σ^2 získaný na základě testovacích statistik U_W, U_S a U_{LR}.

Načtení dat

Chceme testovat $H_0 : \sigma^2 = 4.43^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 \neq 4.43^2$.
Načtení a filtrování dat provedeme stejně jako v praktickém příkladu u testu o střední hodnotě. Také u testu o rozptylu je nutné ověřit předpoklad normality, my jsme ovšem provedli už dříve v rámci praktického příkladu ze 4. týdne, proto nyní vynecháváme.
Vypočítáme odhad směrodatné odchylky na základě dat. Do věrohodnostních test. statistik vstupuje statistika $F_{W,n}$, která pracuje se směrodatnou odchylkou S_n, nikoliv S (která ovšem figuruje ve statistice $F_{W,n-1}$) - musíme tedy spočítat obě tyto směrodatné odchylky.

```
sn <- sqrt((n - 1) / n ) * s
```

Odhad směrodatné odchylky vypočítaný z dat: $S =$ 4.653, $S_n =$ 4.631.

Odhad rozptylu: $\hat{\sigma}^2$ = 21.653.

Funkce pro výpočet statistik

$F_{W,n-1} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ a $F_{W,n} = \frac{nS_n^2}{\sigma_0^2}$

$U_W = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{n}{F_{W,n}}\right)^2, U_S = \frac{n}{2}\left(\frac{F_{W,n}}{n} - 1\right)^2$

$U_{LR} = F_{W,n} - n\left(1 + \ln(\frac{F_{W,n}}{n})\right)$

Vytvoříme funkce, které pro daná $F_{W,n}$ a n vypočítají hodnotu dané statistiky (příp. lze vytvořit ještě obecnější funkce, kde na vstupu bude $S_n,\ \sigma_0,\ n$).

Další možností je vytvořit jednu komplexní funkci, která bude mít na vstupu ještě argument `type` (nebo podobný), do kterého zadáte, kterou test. statistiku na výstupu chcete, a bude tak pro vstup $S,\ \sigma_0,\ n$ generovat postupně všechny statistiky (zde použijete `if`).

Pozn.: Pokud funkce načítáte z jednoho zdrojového souboru (source), musíte je mít pro rozptyl pojmenované jinak než pro testy o střední hodnotě, aby nedošlo ke kolizi.

```
UWSigma <- function(n, fw){
  uw   <- n / 2 * (1 - n / fw) ^ 2
  return(uw)
}
...
```

Kritické obory

Výsledné hodnoty test. statistik:
(1) $F_{W,n-1} = 116.953$, (2) $U_W = 0.387$,
(3) $U_S = 0.463$, (4) $U_{LR} = 0.436$.
Platí:
$F_{W,n-1} \sim \chi^2_{n-1}$
$U_W \sim \chi^2_1$ (totéž U_S a U_{LR})

```
q1 <- qchisq(alpha / 2, n - 1)
q2 <- ...
qlr <- ... # kriticka hodnota pro verohodnostni statistiky
```

Výsledné kritické obory:
$W = (-\infty, 79.40) \cup (136.38, \infty)$ a $W_{LR} = (3.84, \infty)$.
Vyhodnocení: Protože hodnota statistiky … náleží/nenáleží do kritického oboru …, H_0 zamítáme/nezamítáme na hladině významnosti 0.05.

IS, p-hodnota

```
dh_Fw <- s ^ 2 * (n - 1) / qchisq(1 - alpha / 2, n - 1)
hh_Fw <- ...

## pro verohodnostni IS vytvorime sekvenci
sigma_i <- seq(2.50, 6, by = 0.0001)
Fwn_i <- ... # statistiky pro vsechny body sekvence
uW_i <- ...
dh_uW <- min((sigma_i ^ 2)[uW_i < qlr])
hh_uW <- max((sigma_i ^ 2)[uW_i < qlr])
## analogicky uS, uLR

## p-hodnoty
p_Fw <- 2 * min(pchisq(Fw, n - 1), 1 - pchisq(Fw, n - 1))
p_uW <- 1 - pchisq(uW, ...) # doplnte stupne volnosti
## analogicky uS, uLR
```

Tabulka

Výsledky testů o rozptylu basion-bregmatické výšky lebky žen starověké a novověké egyptské populace

	statistika	W_{hh}	W_{dh}	IS_{dh}	IS_{hh}	p-hodnota
$F_{W,n-1}$	116.95	79.4	136.38	16.83	28.91	0.44
U_W	0.39	NA	3.84	15.70	27.20	0.53
U_S	0.46	NA	3.84	16.92	29.30	0.50
U_{LR}	0.44	NA	3.84	16.60	28.40	0.51

Vyhodnocení IS: Protože hodnota $\sigma_0^2 = 19.6249$ náleží/nenáleží IS …., zamítáme/nezamítáme H_0 na hladině významnosti 0.05.
Vyhodnocení p-hodnoty: Protože p-hodnota … je větší/menší než hladina významnosti 0.05, zamítáme/nezamítáme H_0.
Závěr: Na hladině významnosti 0.05 nezamítáme nulovou hypotézu, tj. mezi rozptylem basion-bregmatické výšky lebky žen starověké a novověké egyptské populace neexistuje statisticky významný rozdíl.

Vykreslení věrohodnostních IS

Test pro směrodatnou odchylku

(B) Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ dále otestujte hypotézu o shodě směrodatné odchylky výšky lebky starověké ženské egyptské populace se směrodatnou odchylkou výšky lebky novověké ženské egyptské populace. Testování proveďte pomocí

(a) kritického oboru,

(b) intervalu spolehlivosti,

(c) p-hodnoty

při použití testovacích statistik

(1) $F_{W,n-1}$, (2) U_W, (3) U_S, (4) U_{LR}.

Test $H_0 : \sigma = 4.43$ vs. $H_1 : \sigma \neq 4.43$ převedeme na test

$H_0 : \sigma^2 = 4.43^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 \neq 4.43^2$.

Všechny předchozí výsledky tedy zůstávají v platnosti, pouze musíme upravit hranice intervalů spolehlivosti pro směrodatnou odchylku. *Proveďte jako samostatnou práci doma.*

Příklad 2

Rozdělení testovacích statistik jednovýběrového testu o rozptylu σ^2

Nechť náhodný výběr X pochází z normálního rozdělení, t.j. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 150$ a $\sigma^2 = 30^2$. Pomocí simulační studie ověřte, že pro test o rozptylu σ^2 platí za platnosti H_0 následující:

1. $F_{W,n-1} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ exaktně;
2. $F_{W,n} = \frac{nS_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_n$ asymptoticky.

Vygenerujte $M = 1000$ pseudonáhodných výběrů o rozsahu $n = 3$. Pro každý náhodný výběr vypočítejte hodnoty realizací testovacích statistik $F_{W,n-1}$, $F_{W,n}$. Vytvořte histogramy těchto testovacích statistik a superponujte je křivkami příslušného rozdělení. Dále vytvořte animaci, ze které bude zřejmé, jak se s rostoucím n rozdělení testovací statistiky $F_{W,n}$ asymptoticky blíží k χ^2_n rozdělení, zatímco testová statistika $F_{W,n-1}$ je exaktním rozdělením popsána dostatečně dobře i pro nízké rozsahy náhodného výběru. Animaci vytvořte pro
$n \in \{3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 100, 150, 200, 250, 500\}$.

Příklad 3

Rozdělení testovacích statistik jednovýběrového testu o rozptylu σ^2

Nechť náhodný výběr X pochází z normálního rozdělení, t.j. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 150$ a $\sigma^2 = 30^2$. Pomocí simulační studie ověřte, že pro test o rozptylu σ^2 platí za platnosti H_0 následující:

1. $T_W = \sqrt{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{n}{F_{W,n}}\right) \sim N(0,1)$;
2. $U_W = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{n}{F_{W,n}}\right)^2 \sim \chi^2_1$;
3. $U_S = \frac{n}{2}\left(\frac{F_{W,n}}{n} - 1\right)^2 \sim \chi^2_1$;
4. $U_{LR} = F_{W,n} - n\left(1 + \ln(\frac{F_{W,n}}{n})\right) \sim \chi^2_1$.

Vygenerujte $M = 1000$ pseudonáhodných výběrů o rozsahu $n = 3$. Pro každý náhodný výběr vypočítejte hodnoty realizací testovacích statistik T_W, U_W, U_S a U_{LR}. Vytvořte histogramy těchto testovacích statistik a superponujte je křivkami příslušného rozdělení. Dále vytvořte animaci, ze které bude zřejmé, jak se s rostoucím n rozdělení testovacích statistik T_W, U_W, U_S a U_{LR} asymptoticky blíží k příslušnému rozdělení. Animaci vytvořte pro $n \in \{3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 100, 250, 500\}$.

Funkce Fstat

```
Fstat <- function(mu, sigma, n, M = 1000, type){
  X   <- ... # generovani nah. vyberu
  s   <- apply(X, 1, sd)
  sn  <- ... # sm. odchylka s n namisto n-1

  Fw   <- ...
  Fwn  <- ...

  if (type == 'Fw') {
    X <- Fw
    xx <- seq(0, max(Fw) + 1, length = ...)
    yy <- dchisq(xx, ...) # doplnte stupne volnosti
    main <- expression(F['W, n-1'])
  }
  ... # analogicky dalsi statistiky
  ## nezapomente, ze u tW bude sekvence od min(tW) - 1 do max(tW) + 1

  d <- max(hist(X, plot = F, breaks = 15)$dens)
  hist(..., breaks = 15, ylim = c(0, d + d / 5), ...)
  ... # doplneni krivky hustoty pomoci lines
}
```

Animace

Pro vykreslení animace

1. nastavíme v R-chunk `fig-show: animate` (nezapomeneme načíst knihovnu `gifski`),
2. definujeme si posloupnost `n`, pro které chceme animaci vykreslovat,
3. pomocí `for` cyklu pro jednotlivá `i` z posloupnosti `n` vykreslíme rozdělení příslušných statistik připravenou funkcí `Fstat()`.

Výsledky pro $F_{W,n}$ a $F_{W,n-1}$

Výsledky pro ostatní statistiky

Závěr

Pomocí simulací jsme ověřili platnost asymptotických vztahů. Animace rovněž potvrzují, že vztah $F_{W,n-1} \sim \chi^2_{n-1}$ platí exaktně, zatímco vztah $F_{W,n} \sim \chi^2_n$ platí pouze asymptoticky (tj. pro $n \to \infty$).