Testy o dvou pravděpodobnostech

Mgr. Zdeňka Geršlová

Test o rozdílu pravděpodobností

Buď $X_1 \sim Bin(N_1, p_1)$ náhodná proměnná popisující počet zubů zlomených po vystavení tepelnému šoku a $X_2 \sim Bin(N_2, p_2)$ náhodná proměnná popisující počet zlomených kontrolních zubů. Z celkového počtu 50 zubů vystavených tepelnému šoku se zlomilo $x_1 = n_1 = 21$ zubů. Z 50 kontrolních zubů se zlomilo $x_2 = n_1 = 11$ zubů. Snižuje tepelný šok mechanickou odolnost zubů?

Testujte nulovou hypotézu (oproti oboustranné alternativě) o tom, že **rozdíl rizik** $p_1 - p_2$ je roven 0. Vypočítejte $100 \times (1 - \alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro $p_1 - p_2$, kde pravděpodobnost pokrytí je rovna $1 - \alpha = 0.95$.

Pro testování použijte testy pomocí Z_{W} i $Z_{\mathrm{W}}^{(alt)}$ a příslušné Waldovy 95% IS.

Waldovy testy

(A) (Klasický) Waldův test

Za platnosti H_0 předpokládáme $Z_W \sim N(0,1)$ a platí vztahy

$z_W = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0}{s_g}$, kde $s_g^2 = \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{N_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{N_2}$

a p-hodnotu počítáme pro oboustrannou alternativu jako

$2Pr(Z_W \geq |z_W||H_{01})$.

Hranice DIS: $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - u_{\alpha/2} s_g, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + u_{\alpha/2} s_g)$.

(B) Alternativní Waldův test

Pokud za platnosti H_0 vezmeme v úvahu $p_1 = p_2$, potom $Z_W^{(alt)} \sim N(0,1)$

a platí $z_W^{(alt)} = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0}{s_g}$, kde $s_g^2 = \hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2})$,

pro $N_1 = N_2$ máme $\hat{p} = \frac{p_1 + p_2}{2}$

a p-hodnotu počítáme pro oboustrannou alternativu jako

$2Pr(Z_W^{(alt)} \geq |z_W^{(alt)}||H_{01})$.

Hranice DIS: $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - u_{\alpha/2} s_g, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + u_{\alpha/2} s_g)$.

Výsledky

Výsledky odhadů:

$N_1 = N_2 = 50, n_1 = 21, n_2 = 11, \hat{p}_1 = 0.42, \hat{p}_2 = 0.22, \hat{p} = 0.32,$
$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0.2.$

Výsledky pro Z_W:

$z_{\mathrm{W}} \doteq 2.195$, p-hodnota $\doteq 0.028$, tedy H_0 zamítáme/nezamítáme na $\alpha = 0.05$.

Waldův 95% empirický IS pro rozdíl rizik $p_1 - p_2$:

$(g_L(\hat{\mathbf{p}}), g_U(\hat{\mathbf{p}})) \doteq (0.0214, 0.3786)$.

Výsledky pro $Z_W^{(alt)}$:

$z_{\mathrm{W}}^{(\mathrm{alt})} \doteq 2.144$, p-hodnota $\doteq 0.032$, tedy H_0 zamítáme/nezamítáme na $\alpha = 0.05$.

Alternativní Waldův 95% empirický IS pro rozdíl rizik $p_1 - p_2$:

$(g_L(\hat{\mathbf{p}}), g_U(\hat{\mathbf{p}})) \doteq (0.017, 0.383)$.

Postup

Vytvoříme funkci `TestProbDiff`, která na základě vstupních parametrů `n1, n2, N1, N2` (pokud bychom chtěli obecně zahrnout i $p_0 \neq 0$, přidáme ještě parametr `p0`)spočítá jednak odhady jednotlivých p_i, jednak hranice IS, test. statistiky a p-hodnoty pro oba typy Z-testu. Výstupem tedy bude list se 2 položkami `estimates` a `Z_test`.

```r
TestProbDiff <- function(n1, n2, N1, N2) {
  ...

  ## vystup ve forme listu
  RESULTS <- list(
    estimates = ..., # vektor odhadu jednotlivych p a jejich
    Z_test = ... # matice/tabulka vysledku pro Zw a Zw(alt)
  )
  return(RESULTS)
}
```

Test pro ln RR a RR

Pokračujeme v zadání z předchozího příkladu. Pomocí klasického a alternativního Z-testu
(a) otestujte (oproti oboustranné alternativě) nulovou hypotézu o logaritmu relativního rizika: $\ln \mathrm{RR} = \ln \frac{p_1}{p_2} = 0$.
Vypočítejte také $100 \times (1-\alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro $\frac{p_1}{p_2}$ (zpětnou transformací DIS pro $\ln RR$), kde pravděpodobnost pokrytí je rovna $1-\alpha = 0.95$.
(b) otestujte (oproti oboustranné alternativě) nulovou hypotézu o podílu rizik (relativním riziku): $\mathrm{RR} = \frac{p_1}{p_2} = 1$.
Vypočítejte také $100 \times (1-\alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro $\frac{p_1}{p_2}$, kde pravděpodobnost pokrytí je rovna $1-\alpha = 0.95$.

Vzorce pro $\ln RR$

Za platnosti H_0 předpokládáme $Z_W \sim N(0,1)$ a platí vztahy

$z_W = \dfrac{\ln \widehat{RR} - \ln RR_0}{s_g}$, kde

$s_g^2 = \frac{1-\hat{p}_1}{N_1 \hat{p_1}} + \frac{1-\hat{p}_2}{N_2 \hat{p_2}}, \ln \widehat{RR} = \ln \frac{\hat{p_1}}{\hat{p_2}}$

a p-hodnotu počítáme pro oboustrannou alternativu jako $2Pr(Z_W \geq |z_W||H_{01})$.

Pokud za platnosti H_0 vezmeme v úvahu $p_1 = p_2$, potom $Z_W^{(alt)} \sim N(0,1)$

a platí $z_W^{(alt)} = \dfrac{\ln \widehat{RR} - \ln RR_0}{s_g}$, kde $s_g^2 = \frac{(1-\hat{p})}{\hat{p}}(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2})$

a p-hodnotu počítáme pro oboustrannou alternativu jako

$2Pr(Z_W^{(alt)} \geq |z_W^{(alt)}||H_{01})$.

- Hranice DIS (vždy s příslušnou s_g pro klasický/alternativní test):
  $(\ln \widehat{RR} - u_{\alpha/2} s_g, \ln \widehat{RR} + u_{\alpha/2} s_g)$.

Vzorce pro podíl rizik

Za platnosti H_0 předpokládáme $Z_W \sim N(0,1)$ a platí vztahy

$z_W = \dfrac{\widehat{RR} - RR_0}{s_g}$, kde

$s_g^2 = \widehat{RR}^2 \left(\frac{1-\hat{p}_1}{N_1\hat{p_1}} + \frac{1-\hat{p}_2}{N_2\hat{p_2}}\right), \widehat{RR} = \frac{\hat{p_1}}{\hat{p_2}}$

a p-hodnotu počítáme pro oboustrannou alternativu jako $2Pr(Z_W \geq |z_W||H_{01})$.

Pokud za platnosti H_0 vezmeme v úvahu $p_1 = p_2$, potom $Z_W^{(alt)} \sim N(0,1)$

a platí $z_W^{(alt)} = \dfrac{\widehat{RR} - RR_0}{s_g}$, kde $s_g^2 = \widehat{RR}^2 \frac{(1-\hat{p})}{\hat{p}}(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2})$

a p-hodnotu počítáme analogicky předchozímu.

- Hranice DIS (vždy s příslušnou s_g pro klasický/alternativní test): $(\widehat{RR} - u_{\alpha/2}s_g, \widehat{RR} + u_{\alpha/2}s_g)$.

Postup

Vytvoříme funkci `TestRelativeRisk`, která na základě vstupních parametrů `n1, n2, N1, N2` spočítá jednak odhady jednotlivých p_i a rizik, jednak hranice IS, test. statistiky a p-hodnoty pro oba typy Z-testu. Funkci buď naprogramujeme tak, že počítá rovnou testy pro relativní riziko i jeho logaritmus, nebo přidáme parametr `type`, kterým budeme řídit, jaký test se má provést. Výstupem bude opět list s položkami `estimates` a `Z_test`.
Můžeme samozřejmě také upravit už původní funkci tak, aby podle argumentu `type` počítala libovolný test pro 2 pravděpodobnosti.

Výsledky pro ln RR a RR

$\hat{RR}$ = 1.9091, $\ln \hat{RR}$ = 0.6466

	dh	hh	Z-stat	p-hodnota
Z-test pro ln RR	1.0319	3.5319	2.0600	0.0394
$Z^{(alt)}$-test pro ln RR	1.0781	3.3806	2.2179	0.0266
Z-test pro RR	0.7346	3.0836	1.5171	0.1293
$Z^{(alt)}$-test pro RR	0.8182	3.0000	1.6333	0.1024

Pro jednotlivé případy tedy ne/zamítáme H_0 na hl. významnosti $\alpha = 0.05$.