

# Testy o střední hodnotě při známém rozptylu

Mgr. Zdeňka Geršlová

# Teorie

Prezentace *Statistical inference I and II*, kapitola 7.

# Příklady

# Příklad 1

**Vzájemné porovnání testovacích statistik  $U_W, U_S, U_{LR}$**

Vzájemně porovnejte tvary křivek  $y = \frac{x}{1+x}$ ,  $y = \log(1+x)$  a  $y = x$  a stanovte, která křivka dosahuje na intervalu  $(0, 5)$  (a) nejvyšších hodnot (b) nejnižších hodnot. Výsledek porovnání lze využít při porovnávání testovacích statistik.

Postup: Vytvoříme sekvenci bodů na zadaném intervalu, definujeme jednotlivé křivky a vykreslíme je do grafu pomocí funkce `lines`.

# Výsledek

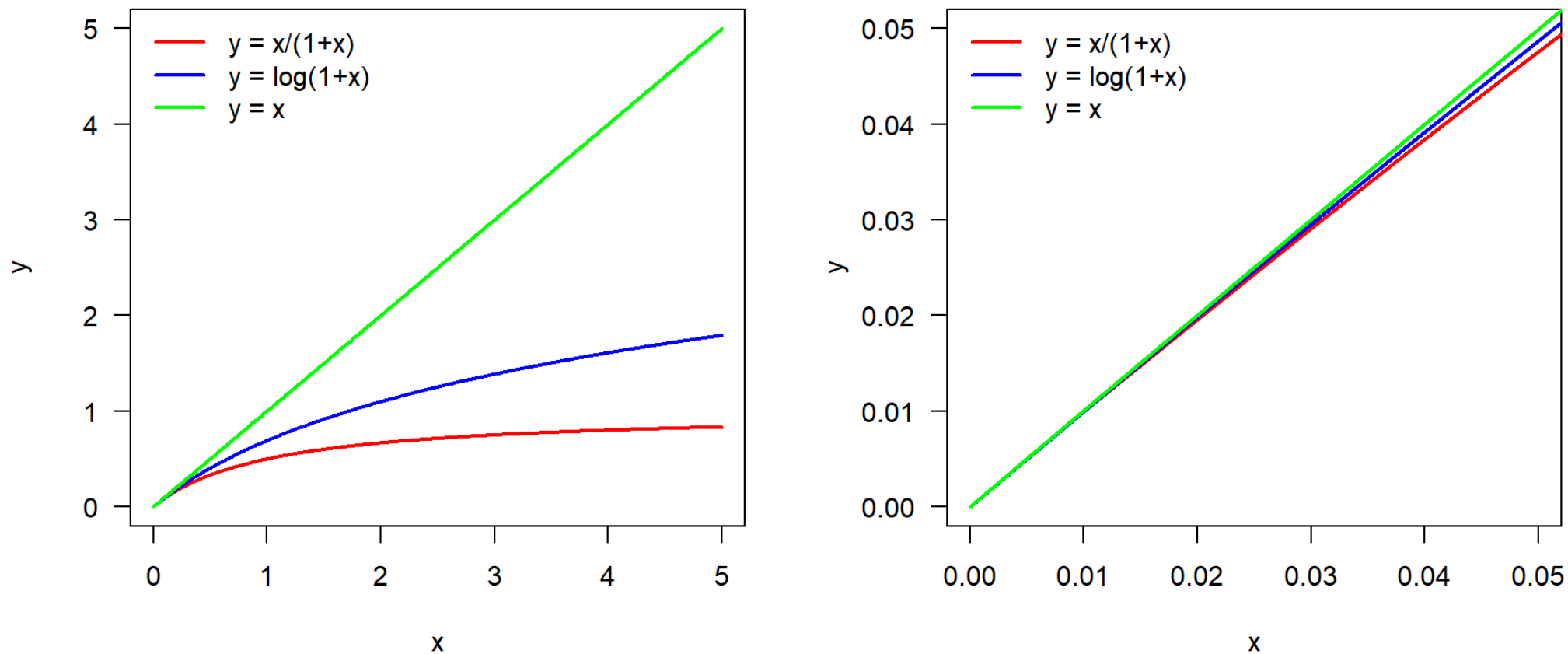


Figure 1: Porovnání křivek (globální a lokální pohled)

# Příklad 2

Aktuální vs. nominální hladina významnosti  $\alpha$ , konzervativní vs. liberální test

Nechť

a.  $X \sim N(20, 100)$

b.  $X \sim pN(20, 100) + (1 - p)N(28, 100)$ , kde  $p = 0.9$ , tedy jde o směs dvou normálních rozdělení  $X \sim N(20, 100)$  a  $X \sim N(28, 100)$  v poměru 9 : 1.

Pro obě části (a) i (b) vygenerujte  $M = 500$  náhodných výběrů s rozsahem  $n = 5$ , resp.  $n = 100$  a vypočítejte hodnotu testovací statistiky  $Z_W$  pro Waldův test nulové hypotézy  $H_0 : \mu = \mu_0 = 20$  oproti  $H_1 : \mu \neq 20$ , když  $\sigma^2$  známe ( $\sigma^2 = 10^2$ ) na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$ . Hodnoty testovacích statistik  $Z_W$  zanepte do histogramu. Vždy spočítejte, kolik testovacích statistik  $Z_W$  spadá do kritického oboru  $W$ . Podíl tohoto čísla a  $M$  představuje aktuální hladinu významnosti  $\hat{\alpha}$ . Porovnejte ji s nominální hladinou významnosti  $\alpha$  a v každé ze čtyř situací určete, zda je test konzervativní či liberální.

*Pozn.: Test samozřejmě nemusí být ani konzervativní ani liberální, což je ten nejlepší případ. Konzervativnost nebo liberálnost testu chápeme jako (negativní) vlastnost testu, kterou, je-li*

# Postup

Pro univerzální použití vytvoříme funkci `HistWald`, která bude připravena pro libovolnou směs normálních rozdělání s volitelnými parametry jednotlivých rozdělání, počtu a rozsahu náh. výběrů.

*Pozn.: Při psaní grafických funkcí můžeme nastavit grafy uvnitř funkce “pevně”, tj. vybrat konkrétní parametry jako barvy, typ čáry atd. Nebo lze vytvořit univerzální funkci použitím ... ve výčtu parametrů, což nám potom umožní přidávat libovolné argumenty funkce `plot`.*

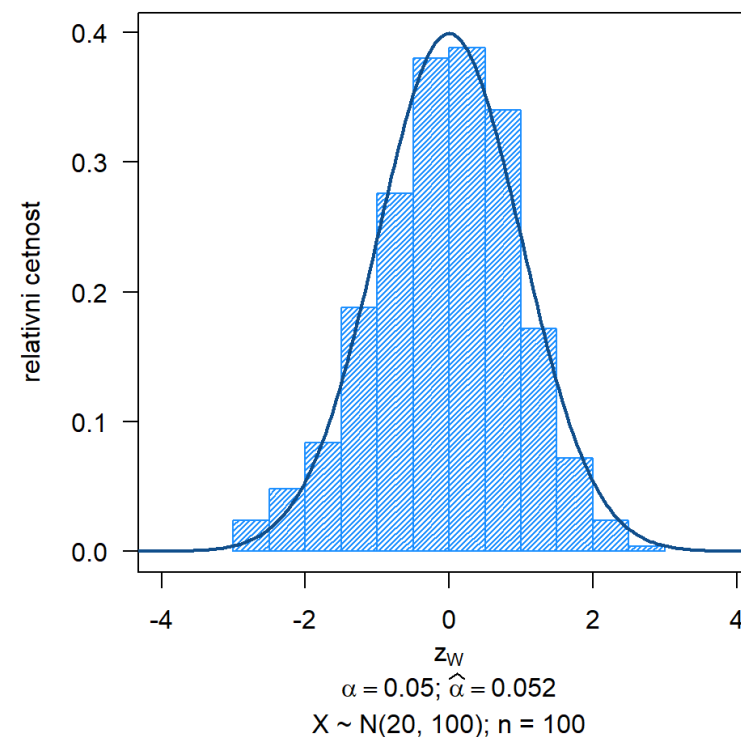
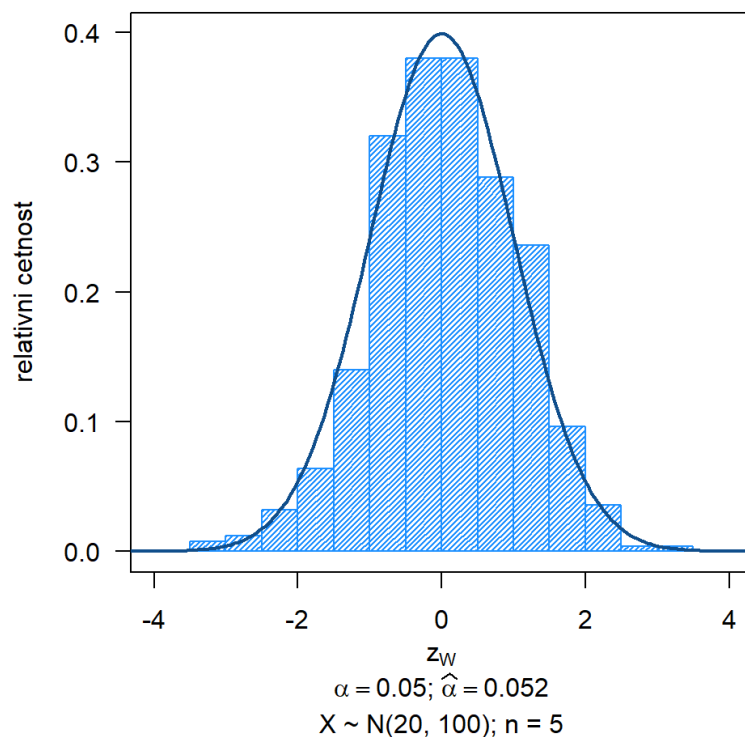
```
HistWald <- function(mu0, n, M = 500,
                    mu1 = 20, mu2 = mu1,
                    sigma1 = 10, sigma2 = sigma1,
                    p = 0.9, alpha = 0.05, main) {
  X <- matrix(NA, M, n)
  for (i in 1:M) {
    bin <- rbinom(n, 1, p)
    X[i, ][bin == 1] <- rnorm(sum(bin), mu1, sigma1)
    X[i, ][bin == 0] <- rnorm(n - sum(bin), mu2, sigma2)
  } # generovani smesi rozdeleni
  m <- apply(X, 1, mean)
  zW <- ... # vzorec pro Zw statistiku
  d <- hist(zW, plot = F)$dens
  xfit <- seq(min(zW) - 10, max(zW) + 10, length = 512) # sekvence pro vykresleni Zw
  yfit <- ... # hustota N(0,1)
  alpha_aktual <- sum(abs(zW) > qnorm(1 - alpha / 2)) / M # aktualni hl. vyzn.
  d <- hist(zW, plot = F)$dens # vyska sloupcu histogramu
  hist(..., ylim = c(0, max(yfit, d)), ...)
  mtext(expression(z[W]), side = 1, line = 2.2)
  mtext(bquote(paste(alpha == .(alpha), "; ", widehat(alpha) == .(alpha_aktual))), side = 1,
```

```
    line = 3.3)
mtext(main, side = 1, line = 4.5)
lines(...) # krivka hustoty
}
```



# Výsledek pro normální rozdělení

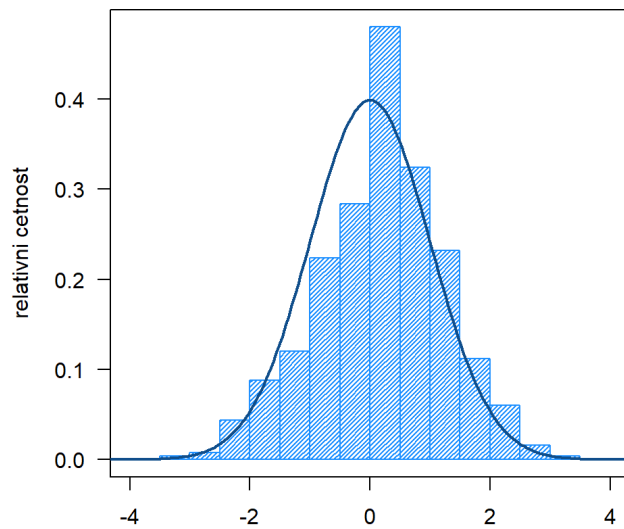
```
1 source("M8986-source.R")
2 set.seed(10)
3 par(mar = c(6, 4, 1, 1), mfrow = c(1,2))
4 HistWald(mu0 = 20, n = 5, main = expression(paste('X ~ N(20, 100); n = 5'))
5 HistWald(mu0 = 20, n = 100, main = expression(paste('X ~ N(20, 100); n = 100'))
```



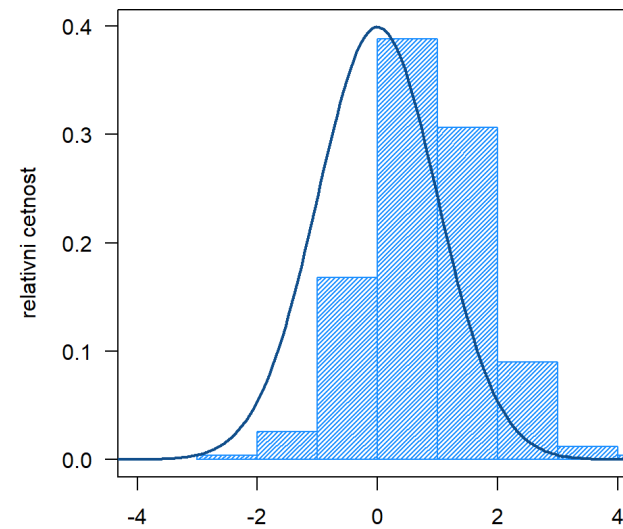
Rozdělení Waldovy testovací statistiky pro test o střední hodnotě při známém rozptylu

# Směs normálních rozdělání

```
1 par(mar = c(6, 4, 1, 1), mfrow = c(1,2))
2 HistWald(mu0 = 20, mu2 = 28, n = 5,
3         main = expression(paste('X ~ 0.9 N(20, 100) + 0.1 N(28, 100); n =
4
5 HistWald(mu0 = 20, n = 100, mu2 = 28,
6         main = expression(paste('X ~ 0.9 N(20, 100) + 0.1 N(28, 100); n = 10
```



$\alpha = 0.05; \hat{\alpha} = 0.074$   
 $X \sim 0.9 N(20, 100) + 0.1 N(28, 100); n = 5$



$\alpha = 0.05; \hat{\alpha} = 0.124$   
 $X \sim 0.9 N(20, 100) + 0.1 N(28, 100); n = 100$

Rozdělání Waldovy testovací statistiky pro test o střední hodnotě při známém rozptylu (směs rozdělání)

# Závěr

Při opakovaném spuštění MC studie vidíme, že v případě (a) aktuální hladina významnosti  $\hat{\alpha}$  nabývá rovnoměrně častokrát vyšší i nižší hodnoty než je nominální hladina významnosti  $\alpha$  (navíc rozdíly nejsou příliš velké). DIS pro  $\mu$ , když  $\sigma^2$  známe, není v tomto případě konzervativní ani liberální, stejně jako test založený na testovací statistice  $Z_W$ .

Oproti tomu v případě (b) je aktuální hladina významnosti  $\hat{\alpha}$  vyšší než nominální hladina významnosti  $\alpha$ , tj. aktuální pravděpodobnost pokrytí je nižší než nominální pravděpodobnost pokrytí a DIS pro  $\mu$ , když  $\sigma^2$  známe, je v tomto případě liberální, stejně jako test založený na testovací statistice  $Z_W$ . Efekt se více projeví pro vyšší rozsah náhodných výběrů.

# Příklad 3

## Rozdělení testovací statistiky pro test o střední hodnotě se známým rozptylem

Nechť náhodný výběr  $X$  pochází z normálního rozdělení, t.j.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Pomocí simulační studie porovnejte rozdělení testovací statistiky  $Z_W$  pro test nulové hypotézy  $H_0: \mu = 150$  (alternativní hypotéza  $H_1: \mu \neq 150$ ), když rozptyl  $\sigma^2$  známe, s rozdělením testovací statistiky stanovené na základě náhodného výběru se střední hodnotou  $\mu$ .

Parametry zvolte

(a)  $\mu = 146, \sigma^2 = 10^2, n = 50$ ;

(b)  $\mu = 155, \sigma^2 = 10^2, n = 50$ .

Nechť dále  $X$  pochází ze směsi dvou normálních rozdělení, t.j.

$$X \sim [pN(\mu, 10^2) + (1 - p)N(\mu, 30^2)], \text{ kde } p = 0.9 \text{ a}$$

(c)  $\mu = 146$ ;

(d)  $\mu = 155$ .

Proveďte simulační studii popsanou výše také pro tento náhodný výběr.

# Postup

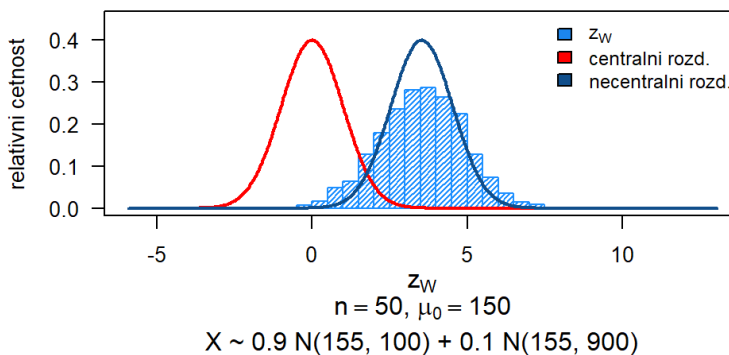
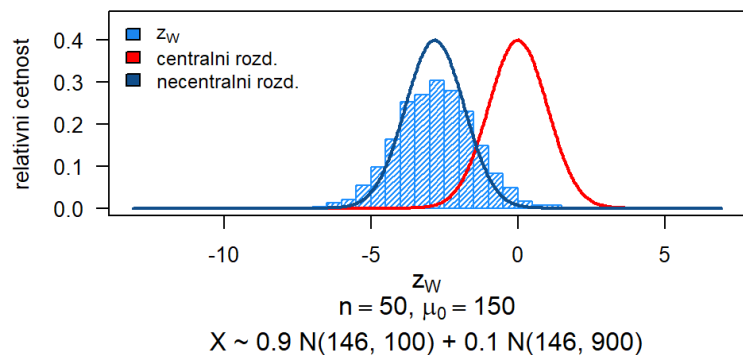
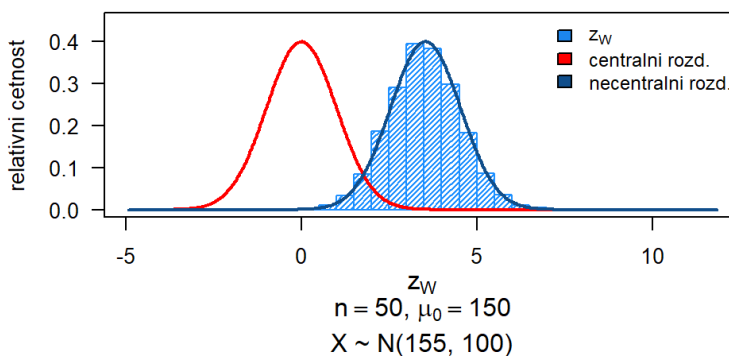
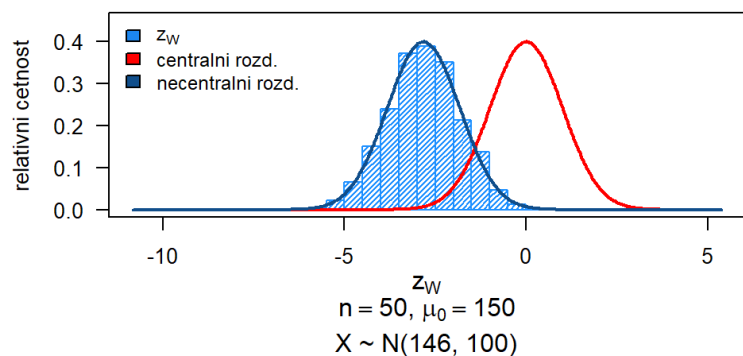
1. Nasimulujte  $M$  pseudonáhodných výběrů,  $M = 1, \dots, 2\,000$  a pro každý vypočítejte realizaci testovací statistiky  $z_{W,\lambda}^{(m)} = \frac{\bar{x}_m - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$  pro nulovou hypotézu  $H_0: \mu = 150$  oproti  $H_1: \mu \neq 150$ .
2. Vykreslete histogram testovacích statistik  $Z_W$  a superponujte jej jednak křivkou hustoty normálního rozdělení  $N(\lambda, 1)$  s parametrem nacentrality  $\lambda$  ( $\lambda = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ , kde  $\mu$  je skutečná střední hodnota (relevantní za platnosti  $H_1$ )) a jednak křivkou hustoty standardizovaného normálního rozdělení  $N(0, 1)$ .

Obě křivky nakonec vzájemně porovnejte.

*Pozn.: U směsi křivka hustoty nacentrálního rozdělení nesuperponuje histogram statistik  $z_W$  dostatečně. Zamyslete se nad tím, proč.*

# Výsledné grafy

```
1 par(mar = c(6, 4, 1, 1), mfrow = c(2,2))
2 RozdeleniNecentr(mu = 146, main = 'X ~ N(146, 100)')
3 RozdeleniNecentr(mu = 155, main = 'X ~ N(155, 100)', pozice = 'topright')
4 RozdeleniNecentr(mu = 146, sigma2 = 30, main = 'X ~ 0.9 N(146, 100) + 0.1 N
5 RozdeleniNecentr(mu = 155, sigma2 = 30, main = 'X ~ 0.9 N(155, 100) + 0.1 N
6               pozice = 'topright')
```



V `source` vytvoříme funkci `RozdeleniNecentr`, která bude pro směs rozdělení vykreslovat histogramy superponované křivkami hustoty (normálního rozdělení s parametrem necentrality a standardizovaného norm. rozdělení).

```
RozdeleniNecentr <- function(mu, mu0 = 150, sigma = 10,
                             sigma2 = sigma, M = 2000, n = 50,
                             p = 0.9, main = "", pozice = "topleft"){
  X <- ... # matice nah. vyberu - analogicky predchozimu pr.
  m <- apply(X, 1, mean)
  zW <- ... # test. statistika z_w
  lambda <- ... # parametr necentrality

  xfit <- ... # sekvence pro vykresleni hustoty
  yfit <- ... # hustota norm. rozd.
  zfit <- ... # hustota necentralniho norm. rozd.

  hist(...)
  lines(...) # cervene N(0,1), modre necentralni
  legend(pozice, ...)
}
```

# Komentář

Centrální rozdělení přísluší parametru  $\mu_0 = 150$ , proto se červená křivka centrálního rozdělení realizuje okolo hodnoty 0. Naproti tomu rozdělení testovací statistiky  $Z_W$  přísluší hodnotě  $\mu = 146$  (resp.  $\mu = 155$ ), v grafu znázorněno jako modrý histogram superponovaný modrou křivkou, proto parametr necentrality  $\lambda$  nabývá záporné (resp. kladné) hodnoty a histogram i s modrou křivkou necentrálního rozdělení se realizuje nalevo (resp. napravo) od červené křivky centrálního rozdělení. Modrá křivka superponuje histogram přesně, protože náhodný výběr pochází z předpokládaného rozdělení  $N(146, 10^2)$ .

V případě směsi rozdělení je situace podobná, ovšem modrá křivka nyní nesuperponuje histogram přesně, což má důvod právě v přítomnosti “příměsi” v námi předpokládaném rozdělení.



# Příklad 4

## Silofunkce pro jednovýběrový Z-test o střední hodnotě

Předpokládejme, že  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , kde  $\sigma^2$  známe. Necht'  $\theta = \mu$ . Na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$  testujeme všechny tři typy hypotéz

- $H_{01} : \mu = \mu_0$  oproti  $H_{11} : \mu \neq \mu_0$  (oboustranná);
- $H_{02} : \mu \leq \mu_0$  oproti  $H_{12} : \mu > \mu_0$  (pravostranná);
- $H_{03} : \mu \geq \mu_0$  oproti  $H_{13} : \mu < \mu_0$  (levostranná).

Odvoďte tvary silofunkcí pro všechny tři typy hypotéz (a)–(c), t.j. tvary  $\beta_{11}^*(\mu)$ ,  $\beta_{12}^*(\mu)$  a  $\beta_{13}^*(\mu)$  (viz Aplikovaná statistická inferencia I - př. 155, str. 122 a dále)

Dále nakreslete silofunkce pro všechny tři typy hypotéz (a)–(c), kde  $\mu_0 = 150$ , a  $\sigma^2 = 10^2$ . Do jednoho obrázku zakreslete vždy tvary silofunkcí pro  $n = 10$ ,  $n = 20$ ,  $n = 50$  a  $n = 100$ . Hodnoty  $\mu$  volte rozumně, např. v intervalu (132; 168).

# Postup

Vytvoříme funkci `SilaExakt` pro výpočet exaktní silofunkce

```
SilaExakt <- function(mu0 = 0, mu, sigma = 1,
                    n, alpha = 0.05, alternative = "two.sided") {
  if (alternative == "two.sided") {
    sila <- pnorm(qnorm(alpha / 2) - (mu - mu0) / sigma * sqrt(n)) +
      pnorm(qnorm(alpha / 2) + (mu - mu0) / sigma * sqrt(n))
  }

  if (alternative == "greater") {
    ... # pravostranna alternativa
  }

  if (alternative == "less") {
    ... # levostranna alternativa
  }
  return(sila)
}
```

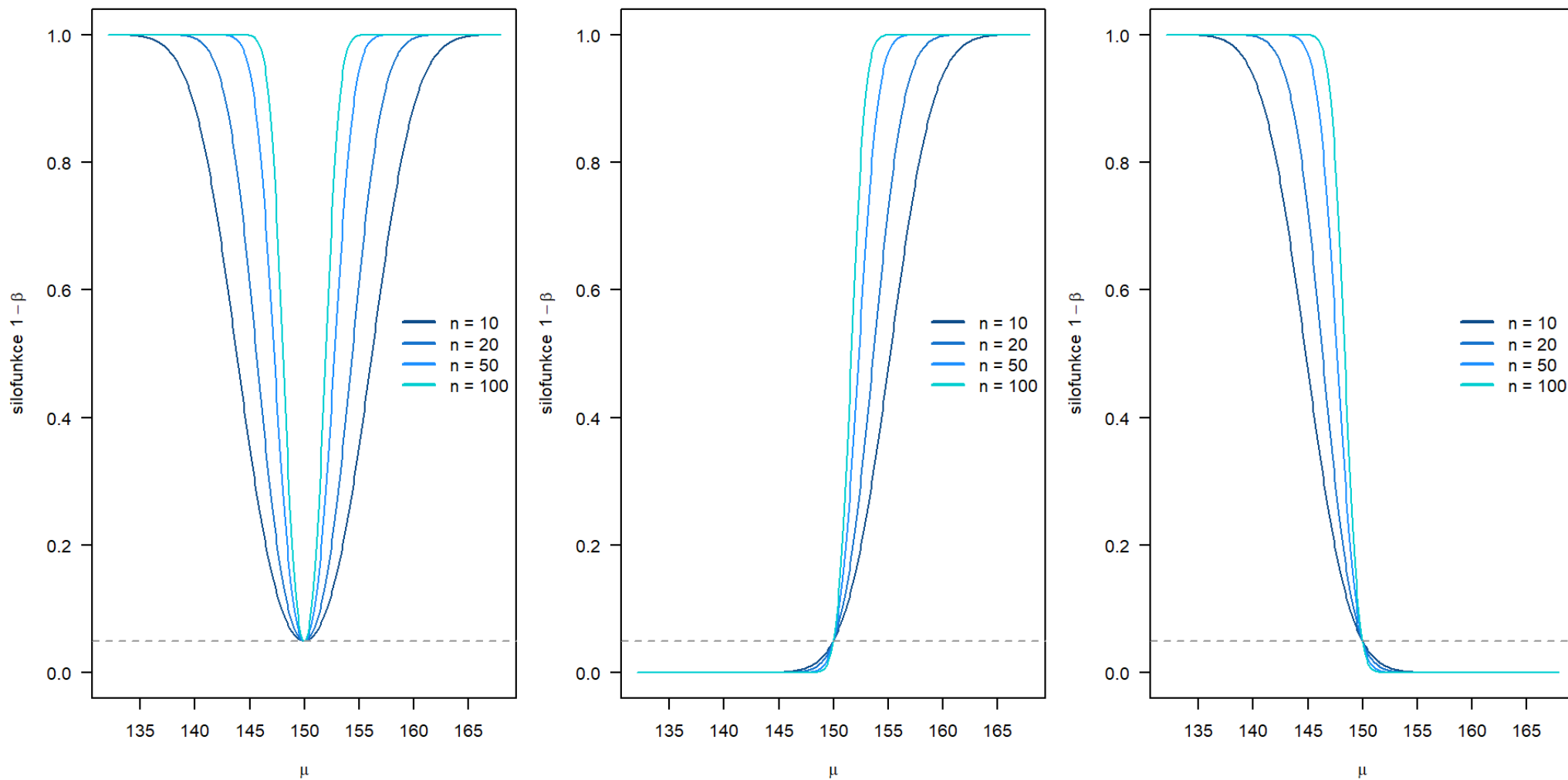
A dále funkci `PlotSila`, která bude pracovat s výstupem této funkce a vykreslí silofunkce pro zadaná `n`.

```
PlotSila <- function(mu0 = 150, mu, sigma = 10,
                    n, alpha = 0.05, alternative = "two.sided") {
  barva <- ... # zde muzeme definovat posloupnost barev
  plot(mu, SilaExakt(...), type = "n", ylim = c(0, 1), ...)

  for (i in 1:length(n)) {
    sila <- SilaExakt(..., n = n[i], ...)
    lines(mu, sila, col = barva[i])
  }
}
```

```
}  
  legend(..., col = barva, legend = paste("n =", n), ... ) # legenda  
  abline(...) # pridani linie v alpha  
}  
mu <- seq(..., length = 512) # sekvence pro mu  
n <- c(...) # vektor n
```

# Výsledek



Silofunkce testu o střední hodnotě se známým rozptylem (oboustranná, pravostranná a levostranná alternativa)

# Komentář

Hladina významnosti  $\alpha$  (z definice) udává riziko chyby, že  $H_0$  nesprávně zamítáme, přestože platí. Ve všech třech případech (a), (b) i (c) se tedy pro  $\mu = \mu_0 = 150$  hodnota síly rovná přímo hodnotě hladiny významnosti  $\alpha = 0.05$ .

(a) Z grafu pozorujeme, jak s rostoucí vzdáleností  $\mu$  od  $\mu_0 = 150$  roste pravděpodobnost, že  $H_0$  zamítáme (tj. roste síla testu). Platí tedy, že síla testu klesá s hodnotou  $\mu \rightarrow \mu_0 = 150$  z obou stran.

(b) U pravostranné alternativy síla testu klesá s  $\mu \rightarrow \mu_0 = 150$  zprava.

(c) U levostranné alternativy síla testu klesá s hodnotou  $\mu \rightarrow \mu_0 = 150$  zleva.

# Příklad 5

## Porovnání exaktní a aproximatické silofunkce

Uvedte tvary přesné silofunkce  $\beta_{11}^*$  a přibližné silofunkce  $\tilde{\beta}_{11}^*$  pro test  $H_{01} : \mu = \mu_0$  oproti  $H_{11} : \mu \neq \mu_0$  když  $\sigma^2$  známe. Nakreslete křivky obou silofunkcí do jednoho grafu, kde na ose  $x$  budou různé hodnoty parametru  $\mu$  na ose  $y$  vynesena silofunkce, a porovnejte jejich tvary. Výsledek slovně okomentujte.

Hodnotu  $n$  zvolte 100,  $\mu_0 = 150$  a  $\sigma^2 = 10^2$ . Rozsah osy  $x$  volte rozumně, pro globální pohled např.  $\langle 145; 155 \rangle$ , pro lokální zaměření rozdílů zvolte rozsah osy  $x$   $\langle 148; 152 \rangle$ .

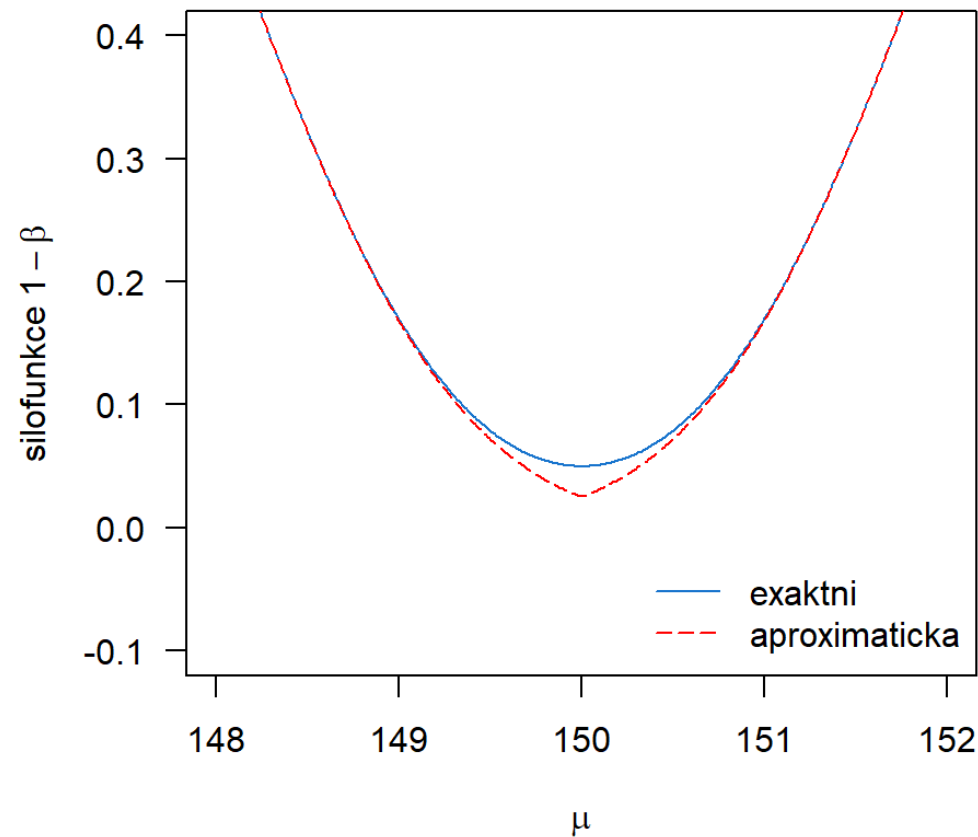
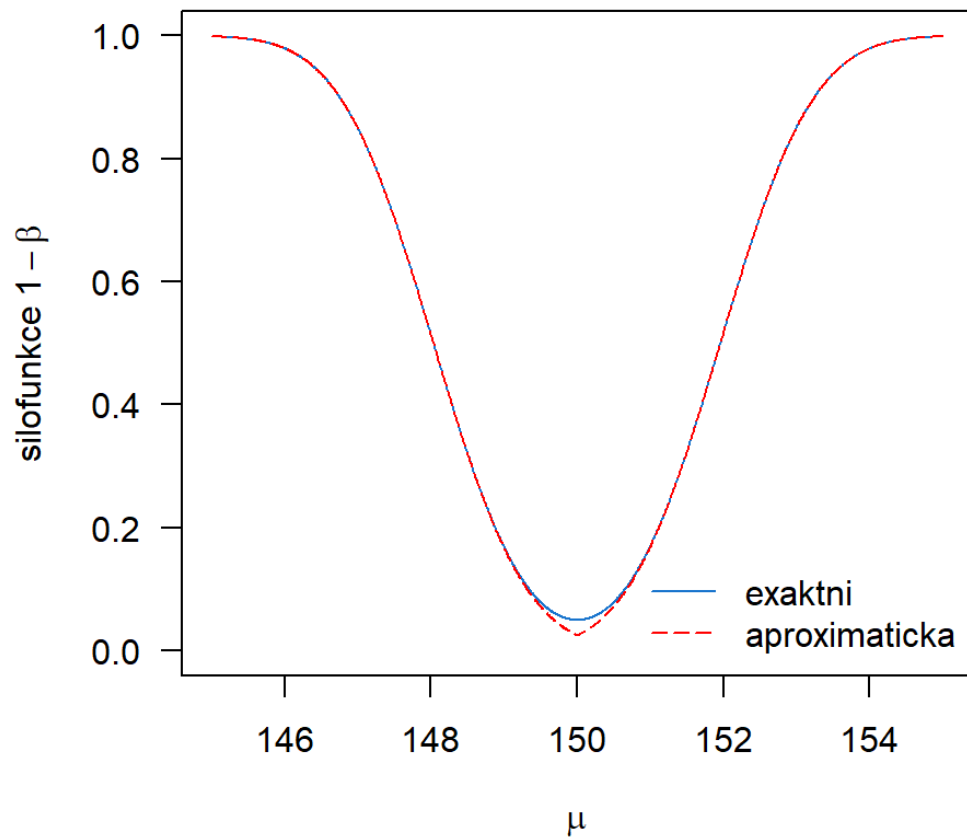
*Pozn.: Aproximatickou sílu můžeme spočítat pouze pro oboustrannou alternativu, neboť její myšlenka spočívá ve společném vyjádření obou částí síly (dvou distribučních funkcí) prostřednictvím jedné distribuční funkce s absolutní hodnotou. U jednostranných alternativ je síla tvořena pouze jednou distribuční funkcí, proto zde myšlenka fungující u oboustranné alternativy postrádá smysl.*

Vytvoříme funkci pro výpočet aproximatické síly `SilaAprox` a pro vykreslení použijeme `plot()` a `lines()`

```
SilaAprox <- function(...){
  sila <- pnorm(qnorm(alpha / 2) + abs(mu0 - mu) / sigma * sqrt(n))
}
```

```
# nastaveni pro lokalni pohled  
plot(..., xlim = c(148, 152), ylim = c(-0.1, 0.4), asp = F, las = 1)
```

# Výsledné grafy



Exaktní vs. aproximatická silofunkce testu o střední hodnotě při známém rozptylu



# Závěr

Exaktní a empirická silofunkce jsou si tvarově velmi blízké všude s výjimkou intervalu cca (149.2; 150.8). Exaktní sílu tedy můžeme aproximovat v případě, že  $\mu$  je dostatečně vzdálená od  $\mu_0$ .

Důvod: Aproximatická síla je založena na zanedbání jedné ze dvou distribučních funkcí, které tvoří exaktní sílu. V okolí  $\mu = \mu_0 = 150$  je vzdálenost  $\mu$  od  $\mu_0$  malá a do výsledné hodnoty exaktní síly přispívají velkým dílem obě distribuční funkce. Pokud tedy jednu z těchto distribučních funkcí zanedbáváme, přicházíme v aproximatické síle o její příspěvek (aproximatická síla je v okolí  $\mu = \mu_0$  výrazněji menší než exaktní síla).

# Příklad 6

## Minimální rozsah náhodného výběru

Předpokládejme, že  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , kde  $\sigma^2 = 10^2$ . Necht'  $\theta = \mu$ . Testujeme všechny tři typy hypotéz:

$H_{01} : \mu = \mu_0$  oproti  $H_{11} : \mu \neq \mu_0$  (oboustranná),

$H_{02} : \mu \leq \mu_0$  oproti  $H_{12} : \mu > \mu_0$  (pravostranná),

$H_{03} : \mu \geq \mu_0$  oproti  $H_{13} : \mu < \mu_0$  (levostranná),

kde  $\mu_0 = 150$ . Vypočítejte minimální rozsah náhodného výběru pro test nulové hypotézy při  $\alpha = 0.05$  a  $1 - \beta = 0.8$ , pro

$\mu \in \{145, 145.5, \dots, 154.5, 155\}$  (ad (1));

$\mu \in \{150.25, 150.5, 150.75, \dots, 153.5, 153.75, 154\}$  (ad (2));

$\mu \in \{146, 146.25, 146.5, \dots, 149.5, 149.75\}$  (ad (3)).

# Postup v R

Sestavíme funkci `MinZTest`, která bude pro zadané parametry rozdělení a stanovenou sílu a hladinu významnosti počítat minimální rozsah pro jednotlivé alternativy (nezapomeňte výstup zaokrouhlit na nejbližší vyšší celé číslo).

```
MinZTest <- function(mu, mu0 = 150, sigma = 10,
                    alpha = 0.05, sila = 0.8, alternative = "two.sided") {
  if (alternative == "two.sided") {
    n <- (qnorm(sila) - qnorm(alpha / 2))^2 / abs(mu - mu0)^2 * sigma^2
  }
  ... # jednostranne alternativy
  return(ceiling(n)) # zaokrouhleni
}
```

Lze použít i funkci `power.z.test` z knihovny `asbio`.

```
library(asbio)
result <- power.z.test(sigma = 10, power = 0.8, alpha = 0.05,
                      test = "two.tail", effect = c(0.5, 1, 2))
ceiling(result$n)
```

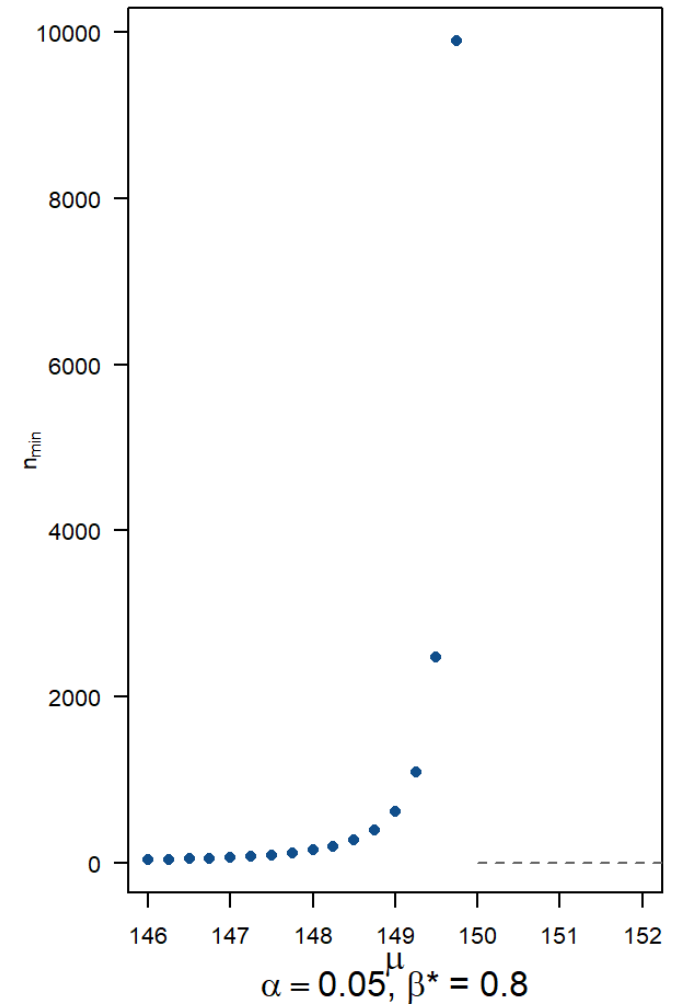
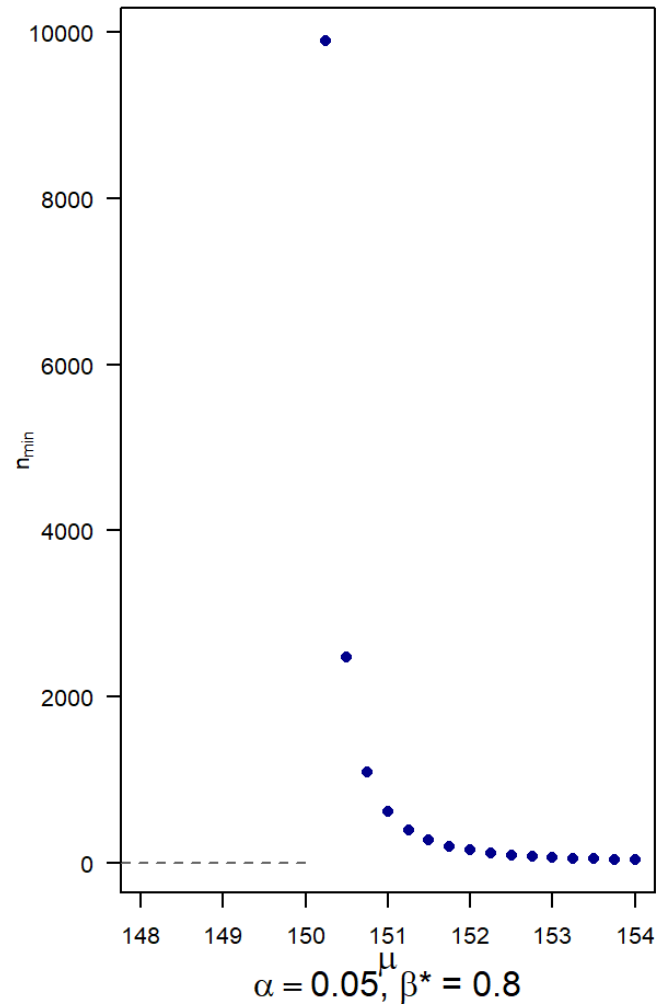
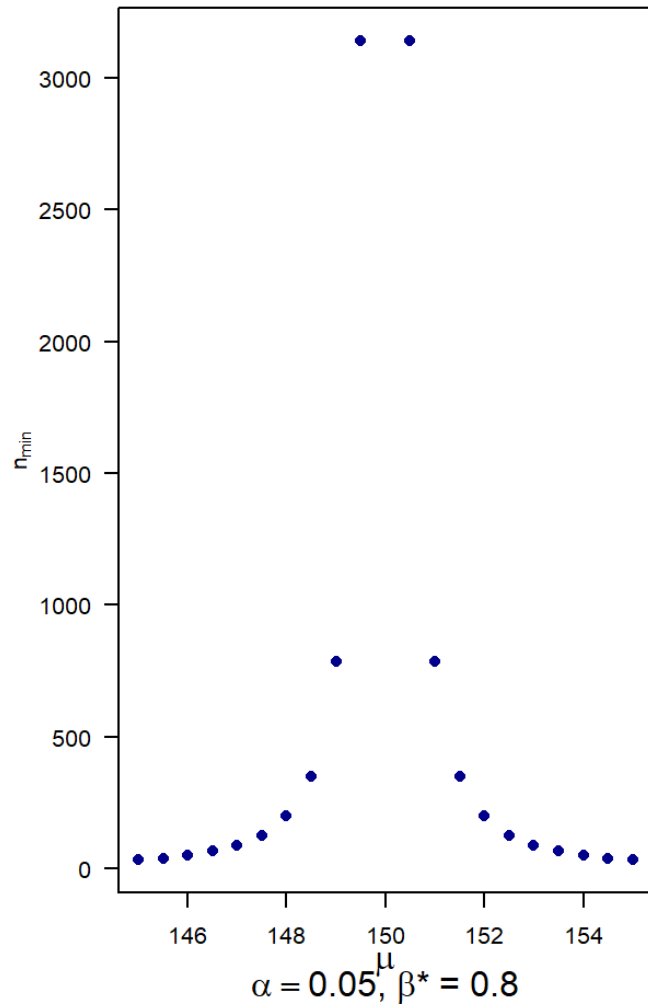
```
[1] 3140 785 197
```

Potom sestavíme sekvenci  $\mu$  dle zadání pro příslušnou alternativu a vykreslíme bodový graf, kde na ose  $x$  jsou jednotlivé hodnoty  $\mu$  a na ose  $y$  příslušný minimální rozsah.

Pozn.: K vykreslení čárkované čáry v místě, kde nemá smysl uvažovat min. rozsah (případ jednostranné alternativy), lze použít funkci `segments`.

```
segments(145, 0, 150, 0, lty = 2, col = 'grey40')
```

# Grafy



Minimální rozsahy náh. výběru pro Z test o střední hodnotě při známém rozptylu

# Tabulka

```
```{r}
#| code-line-numbers: false
#| tbl-cap: Rozsahy náh. výběru pro jednotlivé alternativy Z testu pro zvolená  $\mu$ 
#| options: knitr.kable.NA = '.'
library(knitr)
mu_vyber <- c(145:149, 149.5, 150.5, 151:155)
n11 <- MinZTest(mu_vyber, alternative = 'two.sided')
n12 <- MinZTest(mu_vyber, alternative = 'greater')
n13 <- MinZTest(mu_vyber, alternative = 'less')
n12 <- c(rep(NA, 6), n12[7:12])
n13 <- c(n13[1:6], rep(NA, 6))

tab <- data.frame(t(data.frame(mu = mu_vyber, n11 = n11, n12 = n12, n13 = n13)),
  row.names = c('$\\mu$', '$H_{11}: \\mu = \\mu_0$',
    '$H_{12}: \\mu > \\mu_0$', '$H_{13}: \\mu < \\mu_0$'))
kable(tab, col.names = NULL)
```
```

Rozsahy náh. výběru pro jednotlivé alternativy Z testu pro zvolená  $\mu$

| $\mu$                  | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 149.5  | 150.5  | 151 | 152 | 153 | 154 |
|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|--------|--------|-----|-----|-----|-----|
| $H_{11} : \mu = \mu_0$ | 32  | 50  | 88  | 197 | 785 | 3140.0 | 3140.0 | 785 | 197 | 88  | 50  |
| $H_{12} : \mu > \mu_0$ | NA  | NA  | NA  | NA  | NA  | NA     | 2474.0 | 619 | 155 | 69  | 39  |
| $H_{13} : \mu < \mu_0$ | 25  | 39  | 69  | 155 | 619 | 2474.0 | NA     | NA  | NA  | NA  | NA  |

*Pozn.: Pro oboustrannou alternativu jsou rozsahy náhodných výběrů (pro pevně zvolené  $\mu_0$  a  $\mu$ ) vyšší než pro jednostranné alternativy.*

# Příklad 7

**Silofunkce testu o střední hodnotě  $\mu$  když  $\sigma^2$  známe**

Předpokládejme, že  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , kde  $\sigma^2 = 10^2$ ,  $n = 100$ . Necht'  $\theta = \mu$ . Na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$  testujeme hypotézu  $H_{01} : \mu = \mu_0$  oproti  $H_{11} : \mu \neq \mu_0$  (oboustranná), kde  $\mu_0 = 150$ .

Vytvořte animaci zobrazující

(a) změnu polohy necentrálního rozdělení vzhledem k hodnotě centrálního rozdělení testovací statistiky testu o  $\mu$  když  $\sigma^2$  známe, spolu s barevně odlišenou oblastí kritického oboru a exaktní síly;

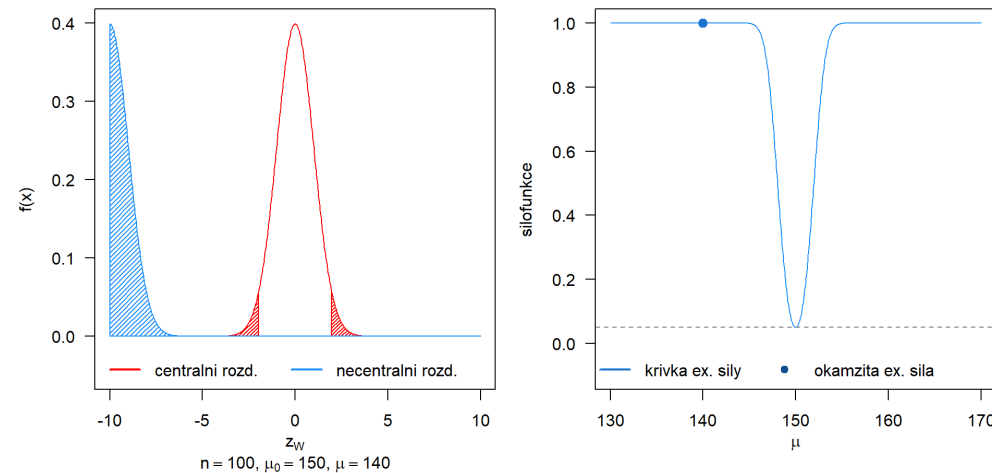
(b) změnu hodnoty exaktní silofunkce; při měnící se střední hodnotě náhodného výběru  $\mu = 140, 141, \dots, 146, 146.5, \dots, 153.5, 154, 155, \dots, 160$ .

Pozn: V prvním grafu budeme mít červeně křivku hustoty centrálního rozdělení s vyznačeným kritickým oborem, modře křivku hustoty necentrálního rozdělení s parametrem necentrality lambda a vyznačenou exaktní silou testu (síla - pravděpodobnost - obsah pod křivkou vymezený kvantilem).



# Animace

```
1  ```{r}
2  #| fig-show: animate
3  #| fig-cap: Průběh síly testu pro střední hodnotu při známém rozptylu,
4  #| obooustranná alternativa
5  mu <- c(140:145, seq(146, 153.5, by = 0.5), 154:160)
6  for (i in 1:length(mu)) {
7    SilaAnimace(150, mu = mu[i], sigma = 10, n = 100,
8               alternative = 'two.sided')
9  }
10  ```
```



Průběh síly testu pro střední hodnotu při známém rozptylu, obooustranná alternativa

# Návod

Vytvoříme funkci `SilaAnimace`, která bude zobrazovat oba grafy.

1. Vypočítáme parametr necentrality  $\lambda$ , určíme dostatečně hustou posloupnost  $x$ , ve které vykreslujeme hustotu, a vypočítáme hustotu centrálního a necentrálního rozdělení.

```
1 SilaAnimace <- function(mu0, mu, sigma, n,  
2                       alpha = 0.05,  
3                       alternative = 'two.sided') {  
4   ...  
5 }
```

2. Pro vykreslení hustoty použijeme nejprve `plot` s argumentem `type = 'n'` pro nastavení grafického okna a potom postupně vykreslíme křivky hustot pomocí `lines` a oblast kritického oboru pomocí funkce `polygon` (níže je postup pro křivku hustoty centrálního rozdělení, necentrální zobrazíme analogicky, jen použijeme hustotu necentrálního rozdělení a zobrazíme modrou barvou).

```
1 par(mfrow = c(1, 2), mar = c(5, 4, 1, 1))  
2 plot(..., type = 'n', las = 1)  
3  
4 q1 <- qnorm(alpha / 2)  
5 q2 <- qnorm(1 - alpha / 2)  
6  
7 polygon(c(min(x), max(x[x <= q1]),  
8         max(x[x <= q1]), rev(x[x <= q1])),  
9         c(0, 0, y[x == max(x[x <= q1])],
```

```
10     rev(y[x %in% x[x <= q1]])),
11     col = 'red', density = 40)
12 polygon(c(min(x[x >= q2]), max(x),
13           rev(x[x >= q2]), min(x[x >= q2])),
14         c(0, 0, rev(y[x %in% x[x >= q2]]),
15           y[x == min(x[x >= q2])]),
16         col = 'red', density = 40)
17 lines(x, y, col = 'red')
```

# Návod

3. Ve druhém grafu vykreslíme křivku exaktní síly (pomocí funkce `SilaExakt`, kterou jsme vytvořili v předchozím příkladu) pro rozumnou sekvenci středních hodnot a přidáme vždy výrazný bod v místě aktuální hodnoty  $\mu$ . Vodorovnou čarou zvýrazníme hodnotu hladiny významnosti  $\alpha$ .

```
1 mu1 <- seq(mu0 - 20, mu0 + 20, length = 512)
2
3 sila_ex <- SilaExakt(mu0 = mu0, mu = mu1, sigma = sigma,
4                     n = n, alternative = 'two.sided')
5 plot(mu1, sila_ex, ... )
6
7 sila_akt <- SilaExakt(mu0 = mu0, mu = mu, sigma = sigma,
8                       n = n, alternative = 'two.sided')
9 points(...)
```

# Závěr

V hodnotě  $\mu = \mu_0 = 150$  necentrální rozdělení splývá s centrálním a silofunkce dosahuje svého minima, které je rovno hladině významnosti  $\alpha = 0.05$ .

Při vzdalování  $\mu$  od  $\mu_0$  se necentrální rozdělení vzdaluje od centrálního a hodnota silofunkce roste.

