Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\{k, k+1, k+2, \dots\}$;
obvykle $k = 0$ nebo $k = 1$.

Označení: a posloupnost, $n \in \mathrm{Dom}(a)$.
$a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti: $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$

Vlastnosti:
- ohraničenost
- periodicita (s přirozenou periodou)
- ∘ monotonnost

Operace skládání není obecně definována.

Zadávání posloupnosti:
- obecným předpisem
- rekurentně

Rekurentní zápis posloupnosti: předpis pro výpočet obecného členu posloupnosti pomocí předchozího (nebo několika předchozích) současně se zadáním počátečního členu (nebo několika počátečních členů)

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$

$d > 0$ neohraničená ryze rostoucí
$d < 0$ neohraničená ryze klesající,

$d = 0$ ohraničená stacionární

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$

$q > 1,\ a_0 \neq 0$	neohraničená, $a_0 > 0$ ryze rostoucí, $a_0 < 0$ ryze klesající
$q = 1$	ohraničená (stacionární)
$0 < q < 1,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, $a_0 > 0$ ryze klesající, $a_0 < 0$ ryze rostoucí
$q = 0,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, $a_0 > 0$ klesající, $a_0 < 0$ rostoucí
$-1 < q < 0,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, „tlumené oscilace“
$q = -1,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, periodická s periodou 2
$q < -1,\ a_0 \neq 0$	neohraničená, „netlumené oscilace“

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$	$\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	

---

pro „velká“ n „se chová“ jako geometrická s kvocientem $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$
a s počátečním členem $\frac{1}{10}(5+\sqrt{5})$

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$	$\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	
logistická	$a_{n+1} = ra_n\left(1 - \dfrac{r-1}{r}\dfrac{a_n}{K}\right)$		r – růstový koeficient, K – kapacita (úživnost)

$$r = 2,\ K = \tfrac{1}{2},\ a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n):\ a_n = \tfrac{1}{2}\left(1 - (1 - 2a_0)^{2^n}\right)$$

$$r = 4,\ K = \tfrac{3}{4},\ a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n):\ a_n = \left[\sin\left(2^n \arcsin\sqrt{a_0}\right)\right]^2$$