Nechť $P$ je polynom stupně $n$ a $L$ je lineární polynom takový, že pro $x_0 \in \mathbb{R}$ platí $P(x_0) = L(x_0)$ a $P'(x_0) = L'(x_0)$, tj.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad L(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0).$$

Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je splňena implikace

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; \big|P(x) - L(x)\big| < \varepsilon.$$

*Důkaz:* S využitím známého vztahu

$$(\alpha^k - \beta^k) = (\alpha - \beta) \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \beta^{k-1-j}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

dostaneme

$$\begin{aligned} P(x) = P(x_0) + P(x) - P(x_0) = P(x_0) + \sum_{i=0}^{n} a_i \left(x^i - x_0^i\right) = P(x_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i \left(x^i - x_0^i\right) = \\ = P(x_0) + (x - x_0) \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j x_0^{i-1-j} \end{aligned}$$

a tedy

$$|P(x) - L(x)| = |x - x_0| \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j x_0^{i-1-j} - P'(x_0) \right|,$$

takže pro $x_0 = 0$ platí

$$|P(x) - L(x)| \le |x - x_0| \big|P'(x_0)\big| \tag{1}$$

a pro $x_0 \neq 0$

$$|P(x) - L(x)| \le |x - x_0| \left( \sum_{i=1}^{n} |a_i| |x_0|^{i-1} \sum_{j=0}^{i-1} \left| \frac{x}{x_0} \right|^j + \big|P'(x_0)\big| \right). \tag{2}$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme

$$A = \max\left\{|a_i| : i = 1, 2, \dots, n\right\}, \quad \xi = \begin{cases} |x_0|, & |x_0| < 1, \\ |x_0|^n, & |x_0| \ge 1, \end{cases} \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{|P'(x_0)| + An\xi}\right\}.$$

Pro $x_0 \neq 0$ a $x$ takové, že $|x - x_0| < \delta \le 1$, platí

$$\left| \frac{x}{x_0} \right| = \left| 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right| \le 1 + \frac{|x - x_0|}{|x_0|} < 1 + \frac{1}{|x_0|}$$

a pro tato $x$ tedy je

$$\sum_{j=0}^{i-1} \left| \frac{x}{x_0} \right|^j < \sum_{j=0}^{i-1} \left( 1 + \frac{1}{|x_0|} \right)^j = \frac{\left(1 + \frac{1}{|x_0|}\right)^i - 1}{\frac{1}{|x_0|}} = \frac{(|x_0| + 1)^i - |x_0|^i}{|x_0|^{i-1}}.$$

Protože navíc $|a_i| \leq A$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme s využitím binomické věty a definice symbolu $\xi$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i||x_0|^{i-1} \sum_{j=0}^{i-1} \left|\frac{x}{x_0}\right|^j \leq A \sum_{i=1}^{n} \left((|x_0|+1)^i - |x_0|^i\right) = A \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} |x_0|^j \leq$$

$$\leq A \sum_{i=1}^{n} \xi \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} = A \sum_{i=1}^{n} \xi = An\xi.$$

Tento odhad dosadíme do nerovnosti (2),

$$|P(x) - L(x)| \leq |x - x_0| \left(\left|P'(x_0)\right| + An\xi\right).$$

Poněvadž $\xi = 0$ pro $x_0 = 0$, z předchozí nerovnosti spolu s nerovností (1) plyne, že pro všechna $x, x_0$ taková, že $|x - x_0| < \delta$ platí

$$|P(x) - L(x)| \leq |x - x_0| \left(\left|P'(x_0)\right| + An\xi\right) < \delta \left(\left|P'(x_0)\right| + An\xi\right) \leq \varepsilon.$$