1. domácí úloha z MIN201, jaro 2024

Zadáno: 6. 3. 2024 Odevzdejte do: 18. 3. 2024

Příklad 1. *Dokažte (zdůvodněte) následující tvrzení*

Tvrzení. Polynom $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je

- sudá funkce (tj. $p(-x) = p(x)$) právě tehdy, když $a_k = 0$ pro k liché;
- lichá funkce (tj. $p(-x) = -p(x)$) právě tehdy, když $a_k = 0$ pro k sudé.

Dále platí, že máme-li zadané body $[x_i, y_i]$, kde $x_i \in [0, \infty)$, a hledáme interpolační polynom $p(x)$ bodů

- $[x_i, y_i]$, $[-x_i, y_i]$, pak je polynom $p(x)$ sudá funkce;
- $[x_i, y_i]$, $[-x_i, -y_i]$, pak je polynom $p(x)$ lichá funkce.

Tato dvě tvrzení lze dát jednoduše dohromady, tedy hledáme-li interpolační polynom množiny bodů, která je osově souměrná podle osy x nebo středově souměrná podle počátku, pak hledám polynom v některém z výše uvedených tvarů (přičemž stále platí, že stupeň polynomu je o jedna menší než počet všech zadaných bodů, včetně symetrických).

Příklad 2 (Interpolace goniometrických funkcí)**.** *Najděte interpolační polynomy (některých) tabulkových hodnot funkce* $\sin x$ *a* $\cos x$ *na intervalu* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, tedy např. pro* $x_i = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.

[Nápověda: Využijete předchozí tvrzení.]

Bonusový příklad (Funkce tangens)**.** *Nalezněte interpolační polynom tabulkových hodnot funkce* $\operatorname{tg} x$*, např. pro hodnoty* $x_i = -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$*. Dále aproximujte funkci* $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ *pomocí podílu interpolačních polynomů z minulého příkladu. Obě aproximace porovnejte v oblíbeném matematickém softwaru (např. WolframAlpha) s grafem funkce* $\operatorname{tg} x$ *a okomentujte.*

Příklad 3. *Bez použití l'Hôpitalova pravidla vypočítejte následující limity posloupností a funkcí.*

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1)^2}{2n \cdot (2n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n}\right)$$

iii) $$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6}$$

iv) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

Příklad 4 (Důkaz konvergence)**.** *Dokažte, že konverguje posloupnost* a_n *zadaná rekurentně:*

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}, \quad a_1 = 1.$$

[Nápověda: Ukažte, že je posloupnost rostoucí a že je shora ohraničená - to můžete ukázat sporem z předpokladu, že pro dostatečně velké $c \in \mathbb{R}$ *existuje* $n \in N$ *takové, že* $a_n \geq c$*.]*

Bonusový příklad. *Dokažte, že pro každé* $c > 0$ *konverguje posloupnost* a_n *zadaná rekurentně:*

$$a_{n+1} = \sqrt{c+a_n}, \quad a_1 = \sqrt{c}.$$

[Nápověda: podobné jak minulé, navíc musíte ukázat, že pro $c \in (0,1)$ *je posloupnost rostoucí.]*