2. domácí úloha z MIN201, jaro 2024

Zadáno: 25. 3. 2024 — Odevzdejte do: 4. 4. 2024

Příklad 1 (Vztah mezi logaritmy různých základů). *Dokažte, že pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}^+$ platí*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}\ .$$

Řešení. Rovnici si upravíme a obě strany dáme do exponentu

$$\begin{aligned}\log_b a \cdot \log_a x &= \log_b x \quad /b^{(\cdots)}\\ b^{\log_b a \cdot \log_a x} &= b^{\log_b x}\\ x = a^{\log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} &= b^{\log_b x} = x\end{aligned}$$

Vidíme, že poslední rovnost je splněná a prováděli jsme jen ekvivalentní úpravy (protože exponenciální funkce je bijektivní), tedy platí i první rovnost. $\triangle$

Příklad 2 (Derivace). *Spočítejte derivaci funkce*

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2},$$

upravte ji do co nejjednoduššího tvaru a ukažte, že je funkce $f(x)$ rostoucí pro $x > 0$ a klesající pro $x < 0$.

Řešení.

$$\begin{aligned}f'(x) &= x' \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + x \cdot \left(\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)' - \left(\sqrt{1+x^2}\right)'\\ &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + x \cdot \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)' - \left((1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)'\\ &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+x^2)'\right) - \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+x^2)'\\ &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right) - \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\\ &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\ &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x}{\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}+x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\ &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\ &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\end{aligned}$$

Derivace je definovaná na celém $\mathbb{R}$, protože vnitřek logaritmu je vždy kladný:

$$x + \sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2} > 0.$$

Podle znaménka $f'(x)$ ukážeme, že na daných intervalech je funkce rostoucí/klesající:

$$\begin{aligned}&\text{pro } x > 0: \quad f'(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) > \ln\left(0 + \sqrt{1+0}\right) = \ln 1 = 0\\ &\text{pro } x < 0: \quad x + \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2} \leq \left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{x^2}\right)\\ &\qquad\qquad \leq 1 + x^2 - x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) < 0.\end{aligned}$$

$\triangle$

Bonusový příklad (Rovnice s logaritmy)**.** *Nalezněte všechna řešení rovnice*

$$15^{\log_5 3} \cdot x^{1+\log_5 9x} = 1.$$

[Nápověda: Obě strany zlogaritmujte $\log_5(\ )$*, upravte rovnici a pomocí substituce vyřešte.]*

Příklad 3 (l'Hôpital)**.** *Pomocí l'Hôpitalova pravidla spočítejte limity:*

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{3^x - 1}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x + e^{\frac{1}{x}}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x^2}}$

iv) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x \ln(1-x)$

Řešení.

i) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{3^x-1} = \left|\frac{\ln 1}{3^0-1} = \frac{0}{0}\right| \overset{\ell' H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+4x))'}{(3^x-1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+4x}\cdot 4}{3^x \cdot \ln 3} = \frac{\frac{1}{1+0}\cdot 4}{3^0\cdot \ln 3} = \frac{4}{\ln 3}$$

ii) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \ln x + e^{\frac{1}{x}} &= |-\infty + \infty| = \lim_{x\to 0^+} \ln x + \ln e^{\sqrt[x]{e}} = \lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot e^{\sqrt[x]{e}} \\ &= \ln\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt[x]{e}}}{\frac{1}{x}}\right) = \left|\ln\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{\ell' H}{=} \ln\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt[x]{e}}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot \frac{-\cancel{1}}{\cancel{x^2}}}{-\frac{\cancel{1}}{\cancel{x^2}}}\right) \\ &= \left|\ln(e^{e^{\infty}}\cdot e^{\infty}) = \ln(\infty)\right| = \infty\end{aligned}$$

iii) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x^2}} = \lim_{x\to 1} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{1-x^2}}\right)} &= e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x^2}\cdot \ln x\right)} = \left|\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x^2} \overset{\ell' H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-2x} = -\frac{1}{2}\right| \\ &= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\end{aligned}$$

iv) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \ln x \ln(1-x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(1-x)}{(\ln x)^{-1}} = \left|\frac{-\infty}{\infty}\right| \overset{\ell' H}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{(-1)(\ln x)^{-2}\cdot \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(\ln x)^2 \cdot x}{1-x} = \left|\frac{0}{0}\right| \overset{\ell' H}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{2\ln x\cdot x + (\ln x)^2}{-1} = \frac{0}{-1} = 0\end{aligned}$$ △

Příklad 4 (K větám o střední hodnotě)**.** *S využitím elementárních funkcí dejte příklad funkce f definované po částech na intervalu $[-1,1] \subseteq \mathbb{R}$, kde $f(-1) = f(1)$, a je diferencovatelná na celém intervalu $[-1,-1]$ kromě jednoho bodu a splňuje:*

i) nabývá všech hodnot na $\mathbb{R}$, její derivace nabývá uvnitř intervalu všech hodnot kromě hodnoty zaručené Rolleovou větou o střední hodnotě, tedy

$$H(f) = \mathbb{R}, \quad f'((-1,1)) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

[Nápověda: Zamyslete se nad grafem funkce $\frac{1}{x^2-1}$, „rozstřihněte“ jej na dvě vhodné části a vhodnou úpravou předpisu posuňte/obraťte jednotlivé části a definujte z nich jednu funkci.]

ii) f je spojitá na $[-1,1]$ (tudíž nemůže nabývat všech hodnot) a $f'((-1,1)) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

[Nápověda: Pohrajte si s předpisem funkce pro graf půlkružnice.]

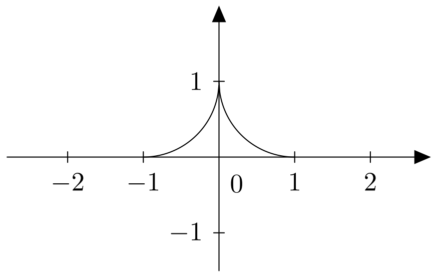
Řešení.

i) Taková funkce neexistuje.

Aby nabývala všech hodnot, musí v bodě nespojitosti utíkat z jedné strany do ∞ a z druhé strany do $-\infty$. Bod nespojitosti může být jenom jeden, protože v něm není funkce diferencovatelná. Tedy nutně nalevo i napravo od bodu nespojitosti musí mít $f'(x)$ stejné znaménko, dejme tomu kladné.

Aby $f'(x)$ mohla změnit znaménko a nabývat i záporných hodnot, musí projít bodem, kde $f'(x) = 0$, jenže to jsme právě nechtěli.

ii) $$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-(x+1)^2} & \text{\textit{pro} } x \in [-1, 0) \\ 1 - \sqrt{1-(x-1)^2} & \text{\textit{pro} } x \in [0, 1] \end{cases}$$



△

Bonusový příklad (Vylepšená věta o střední hodnotě). *Uvažme funkci f splňující na intervalu $[a, b]$ podmínku pro Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Dokažtě (nebo vyvraťte?), že můžeme najít takový bod $\bar{c} \in (a, b)$ ze znění této věty, pro který navíc platí, že tečna ke grafu funkce v tomto bodě je nad nebo pod grafem této funkce na celém intervalu $[a, b]$.*

Jinak řečeno, pro všechna $x \in [a, b]$ existuje $\bar{c} \in (a, b)$, že platí

$$f(x) \leq f(\bar{c}) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - \bar{c}) \qquad \text{\textit{nebo}} \qquad f(x) \geq f(\bar{c}) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - \bar{c}).$$