2. DOMÁCÍ ÚLOHA Z MIN201, JARO 2024

ZADÁNO: 25. 3. 2024 ODEVZDEJTE DO: 4. 4. 2024

Příklad 1 (Vztah mezi logaritmy různých základů)**.** *Dokažte, že pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}^+$ platí*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} .$$

Příklad 2 (Derivace)**.** *Spočítejte derivaci funkce*

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2},$$

upravte ji do co nejjednoduššího tvaru a ukažte, že je funkce $f(x)$ rostoucí pro $x > 0$ a klesající pro $x < 0$.

Bonusový příklad (Rovnice s logaritmy)**.** *Nalezněte všechna řešení rovnice*

$$15^{\log_5 3} \cdot x^{1+\log_5 9x} = 1.$$

[Nápověda: Obě strany zlogaritmujte $\log_5(\ )$, upravte rovnici a pomocí substituce vyřešte.]

Příklad 3 (l'Hôpital)**.** *Pomocí l'Hôpitalova pravidla spočítejte limity:*

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{3^x - 1}$

ii) $\lim_{x\to 0^+} \ln x + e^{\frac{1}{x}}$

iii) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x^2}}$

iv) $\lim_{x\to 1^+} \ln x \ln(1-x)$

Příklad 4 (K větám o střední hodnotě)**.** *S využitím elementárních funkcí dejte příklad funkce f definované po částech na intervalu $[-1,1] \subseteq \mathbb{R}$, kde $f(-1) = f(1)$, a je diferencovatelná na celém intervalu $[-1,-1]$ kromě jednoho bodu a splňuje:*

i) nabývá všech hodnot na $\mathbb{R}$, její derivace nabývá uvnitř intervalu všech hodnot kromě hodnoty zaručené Rolleovou větou o střední hodnotě, tedy

$$H(f) = \mathbb{R}, \quad f'((-1,1)) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

[Nápověda: Zamyslete se nad grafem funkce $\frac{1}{x^2-1}$, „rozstřihněte" jej na dvě vhodné části a vhodnou úpravou předpisu posuňte/obraťte jednotlivé části a definujte z nich jednu funkci.]

ii) f je spojitá na $[-1,1]$ (tudíž nemůže nabývat všech hodnot) a $f'((-1,1)) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

[Nápověda: Pohrajte si s předpisem funkce pro graf půlkružnice.]

Bonusový příklad (Vylepšená věta o střední hodnotě)**.** *Uvažme funkci f splňující na intervalu $[a,b]$ podmínku pro Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Dokažtě (nebo vyvraťte?), že můžeme najít takový bod $\bar{c} \in (a,b)$ ze znění této věty, pro který navíc platí, že tečna ke grafu funkce v tomto bodě je nad nebo pod grafem této funkce na celém intervalu $[a,b]$.*

Jinak řečeno, pro všechna $x \in [a,b]$ existuje $\bar{c} \in (a,b)$, že platí

$$f(x) \leq f(\bar{c}) + (b-a)(x-\bar{c}) \qquad \textit{nebo} \qquad f(x) \geq f(\bar{c}) + (b-a)(x-\bar{c}).$$