3. domácí úloha z MIN201, jaro 2024

Zadáno: 11. 4. 2024 Odevzdejte do: 18. 4. 2024

Příklad 1 (Konvergence řady). *Uvažme řady*

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) x^n.$$

U řad i) a ii) rozhodněte o konvergenci řady a u řady iii) určete poloměr konvergence a rozhodněte o konvergenci v krajních bodech oboru konvergence.

Řešení. U řady i) využijeme využijeme odmocninového a u ii) podílového kritéria. Uvidíme, že řady konvergují.

$$\text{i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$$

$$(*) \lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{n^{-2}} = \left|\frac{\ln(\cos 0)}{0} = \frac{0}{0}\right| \overset{\ell'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos\frac{1}{n}} \cdot \left(-\sin\frac{1}{n}\right) \cdot \left(-\cancel{\frac{1}{n^2}}\right)}{\frac{-2}{n^{\cancel{3}}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{+\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{-2\cdot\frac{1}{n}} = \left|\frac{0}{0}\right| \overset{\ell'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{n}} \cdot \frac{-1}{\cancel{n^2}}}{-2 \cdot \frac{-1}{\cancel{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2\cos^2\frac{1}{n}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\left((n+1)!\right)^2}{\left(2(n+1)\right)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2\cancel{(n!)^2}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}}{\frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \left|\frac{n^2}{4n^2}\right| = \frac{1}{4} < 1$$

iii) Pro určení poloměru konvergence využijeme odmocninové kritérium. Posloupnost $\sqrt[n]{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|}$ nemá limitu v $+\infty$, protože se bude stále měnit mezi 0 a 1, má však limitu superior, tj. limitu ze suprem následujících hodnot.

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

Poloměr konvergence je tedy $r = \frac{1}{\rho} = 1$. Konverguje tedy na intervalu $(-1, 1)$. V krajních bodech zřejmě nekonverguje, protože limity částečných součtů ani neexistují. Pro $x = 1$ a $x = -1$ máme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)(-1)^n = -1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + \dots \qquad \triangle$$

Bonusový příklad (Obor konvergence - krajní body). *Na cvičení jsme si ukázeli, že řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1+i)^n}$$

konverguje pro všechna $|z| < \sqrt{2}$. Rozhodněte, zda konverguje pro nějaké $|z| = \sqrt{2}$.
[Nápověda: Vyjádřete v goniometrickém tvaru.]

Příklad 2 (Průběh funkce)**.** *Popište průběh funkce*

$$f(x) = e^x + 3x - 8\ln(e^x + 1) + 5,$$

především spočítejte první derivaci, určete intervaly na kterých funkce roste/klesá, najděte lokální extrémy a určete asymptoty (v $\pm\infty$). Dále odhadněte (nepočítejte) bod, kde graf funkce protíná osu x a graf načrtněte.

Řešení.

$$f'(x) = e^x + 3 - \frac{8}{e^x + 1} \cdot e^x = \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^x + 1}$$

Jmenovatel derivace je vždy kladný, tedy znaménko $f'(x)$ se může změnit jen v nulovém bodě čitatele. Zavedeme substituci $y = e^x$ a najdeme stacionární body x_1, x_2.

$$y^2 - 4y + 3 = (e^x)^2 - 4e^x + 3 = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = 2 \pm 1$$
$$e^{x_1} = 1,\ e^{x_2} = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = \ln 3$$

Znaménko derivace na intervalech vymezených stacionárními body zjistíme dosazením bodu ze vnitř intervalu a chováním v $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 3, \quad f'(\ln 2) = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 3}{2 + 1} < 1, \quad \lim_{x \to \infty} f'(x) = \infty$$

Na ose znázorníme, kde funkce roste/klesá, a je hned vidět, kde jsou jaké lok. extrémy.

$$\begin{array}{ccccccc}
f'(x) & + & & - & & + & \\
\hline
 & \nearrow & 0 & \searrow & \ln 3 & \nearrow & x \\
 & & \text{lok. max.} & & \text{lok. min.} & &
\end{array}$$

Z hodnoty limity $f'(x)$ v $-\infty$ je hned jasný sklon asymptoty v $-\infty$ a neexistence asymptoty v $+\infty$. Ale ještě to spočítáme běžným vzorečkem a dostaneme rovnici asymptoty v $-\infty$.

$$a = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{e^x}{x} + 3 - 8 \cdot \frac{\ln(e^x + 1)}{x} + \frac{5}{x} = \left| \frac{0}{-\infty} + 3 - 8 \cdot \frac{0}{-\infty} + \frac{5}{-\infty} \right| = 3$$
$$b = \lim_{x \to -\infty} f(x) - ax = \lim_{x \to -\infty} e^x + \cancel{3x} - 8\ln(e^x + 1) + 5 - \cancel{3x} = 5$$
$$p : y = 3x + 5$$

△

Hodnota v lokálním minimu je

$$f(\ln 3) = 3 + 3\ln 3 - 8\ln 4 + 5 \doteq 0,2$$

tedy graf může protnout osu x pouze nalevo od lok. maxima. Při dosazení $f(-1) \doteq -0.1$ vidíme, že graf musí protínat osu x mezi -1 a 0.

Poznámka. Vzdálenost d dvou bodů $A = [a, b]$ $B = [x_0, y_0]$ na rovině $\mathbb{R}^2$ vyjádříme (podle Pythagorovy věty)

$$d = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}. \tag{1}$$

Tečna ke grafu funkce $g(x)$ v bodě x_0 je tvaru

$$t\colon y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \tag{2}$$

a její směrový vektor je tedy $(1, g'(x_0))$. Normála také prochází bodem $[x_0, g(x_0)]$, tedy její rovnice se bude oproti (2) lišit jen ve sklonu.

Příklad 3 (Nejbližší bod - normála). *Uvažujme bod $A = [a, b]$ a funkci $f(x)$, která je diferencovatelná na celém $\mathbb{R}$. Libovolný bod minimalizující vzdálenost bodu A od grafu funkce f, označme $B = [x_0, y_0]$. Dokažte, že přímka procházející body A a B je normálou k tečně grafu funkce f v bodě x_0.*

[Nápověda:

1) *Napište si rovnici pro normálu ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x, f(x)]$. Zamyslete se, co musí platit, aby bod $[a, b]$ na této normále ležel.*

2) *Jako funkci, kterou chcete minimalizovat, vezměte $d(x)$ vyjadřující vzdálenost bodu $[x, f(x)]$ od bodu A, viz (1). Spočítejte derivaci $d(x)$, přičemž $f(x)$ (jako vnitřní funkce) bude mít zase obecně nějakou derivaci $f'(x)$. Napište si rovnici pro stacionární bod funkce $d(x)$.]*

Řešení. Normála v bodě $[x, f(x)]$ musí mít směrový vektor kolmý ke směrovému vektoru tečny. Tedy směrový vektor normály musí být $(1, \frac{-1}{f'(x)})$, aby platilo

$$0 = \langle (1, f'(x)), (1, \tfrac{-1}{f'(x)}) \rangle = 1 + f'(x) \cdot \tfrac{-1}{f'(x)}$$

Normála procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$ má tvar

$$n\colon y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0),$$

pokud bod $A = [a, b]$ na ní leží, musí být pro něj rovnice splněna, tj.

$$b = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (a - x_0). \tag{3}$$

Vezměme funkci $d(x)$ podle nápovědy

$$d(x) = \sqrt{(x-a)^2 + (f(x) - b)^2},$$

spočítejme její derivaci

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-a)^2 + (f(x) - b)^2}} \cdot \big(2(x-a) + 2(f(x) - b) \cdot f'(x)\big).$$

Pokud graf funkce neprochází bodem A, je výraz pod odmocninou kladný (nenulový) a platí

$$d'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-a) + (f(x) - b) \cdot f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = f(x) - \frac{1}{f'(x)} \cdot (a - x)$$

Tedy podle (3) vidíme, že dokonce v každém stacionárním bodě funkce $d(x)$ prochází normála grafu funkce i bodem $A = [a, b]$. △