3. domácí úloha z MIN201, jaro 2024

Zadáno: 11. 4. 2024 Odevzdejte do: 18. 4. 2024

Příklad 1 (Konvergence řady). *Uvažme řady*

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) x^n.$$

U řad i) a ii) rozhodněte o konvergenci řady a u řady iii) určete poloměr konvergence a rozhodněte o konvergenci v krajních bodech oboru konvergence.

Bonusový příklad (Obor konvergence - krajní body). *Na cvičení jsme si ukázeli, že řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1+i)^n}$$

konverguje pro všechna $|z| < \sqrt{2}$. Rozhodněte, zda konverguje pro nějaké $|z| = \sqrt{2}$.

[Nápověda: Vyjádřete v goniometrickém tvaru.]

Příklad 2 (Průběh funkce). *Popište průběh funkce*

$$f(x) = e^x + 3x - 8\ln(e^x + 1) + 5,$$

především spočítejte první derivaci, určete intervaly na kterých funkce roste/klesá, najděte lokální extrémy a určete asymptoty (v $\pm\infty$). Dále odhadněte (nepočítejte) bod, kde graf funkce protíná osu x a graf načrtněte.

Poznámka. Vzdálenost d dvou bodů $A = [a, b]$ $B = [x_0, y_0]$ na rovině $\mathbb{R}^2$ vyjádříme (podle Pythagorovy věty)

$$d = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}. \tag{1}$$

Tečna ke grafu funkce $g(x)$ v bodě x_0 je tvaru

$$t\colon y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \tag{2}$$

a její směrový vektor je tedy $(1, g'(x_0))$. Normála také prochází bodem $[x_0, g(x_0)]$, tedy její rovnice se bude oproti (2) lišit jen ve sklonu.

Příklad 3 (Nejbližší bod - normála). *Uvažujme bod $A = [a, b]$ a funkci $f(x)$, která je diferencovatelná na celém $\mathbb{R}$. Libovolný bod minimalizující vzdálenost bodu A od grafu funkce f, označme $B = [x_0, y_0]$. Dokažte, že přímka procházející body A a B je normálou k tečně grafu funkce f v bodě x_0.*

[Nápověda:

1) *Napište si rovnici pro normálu ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x, f(x)]$. Zamyslete se, co musí platit, aby bod $[a, b]$ na této normále ležel.*

2) *Jako funkci, kterou chcete minimalizovat, vezměte $d(x)$ vyjadřující vzdálenost bodu $[x, f(x)]$ od bodu A, viz (1). Spočítejte derivaci $d(x)$, přičemž $f(x)$ (jako vnitřní funkce) bude mít zase obecně nějakou derivaci $f'(x)$. Napište si rovnici pro stacionární bod funkce $d(x)$.]*