

3. DOMÁCÍ ÚLOHA Z MIN201, JARO 2024

ZADÁNO: 11. 4. 2024

ODEVZDEJTE DO: 18. 4. 2024

Příklad 1 (Konvergence řady). *Uvažme řady*

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3} \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) x^n.$$

U řad *i)* a *ii)* rozhodněte o konvergenci řady a u řady *iii)* určete poloměr konvergence a rozhodněte o konvergenci v krajních bodech oboru konvergence.

Bonusový příklad (Obor konvergence - krajní body). *Na cvičení jsme si ukázeli, že řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1+i)^n}$$

konverguje pro všechna $|z| < \sqrt{2}$. Rozhodněte, zda konverguje pro nějaké $|z| = \sqrt{2}$.
[Nápověda: Vyjádřete v goniometrickém tvaru.]

Poznámka.

Příklad 2 (Průběh funkce). *Popište průběh funkce*

$$f(x) = e^x + 3x - 8 \ln(e^x + 1) + 5,$$

především spočítejte první derivaci, určete intervaly na kterých funkce roste/klesá, najděte lokální extrémy a určete asymptoty (v $\pm\infty$). Dále odhadněte (nepočítejte) bod, kde graf funkce protíná osu x a graf načrtněte.

Poznámka. Tečna ke grafu funkce $g(x)$ v bodě x_0 je tvaru

$$t: y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0), \tag{1}$$

tedy její směrový vektor je $(1, g'(x_0))$. Normála také prochází bodem $[x_0, g(x_0)]$, tedy její rovnice se bude oproti (1) lišit jen ve sklonu.

Příklad 3 (Nejbližší bod - normála). *Uvažujme bod $A = [x_0, y_0]$ a funkci $f(x)$, která je diferencovatelná na celém \mathbb{R} . Libovolný bod minimalizující vzdálenost bodu A od grafu funkce f , označme $B = [x_1, y_1]$. Dokažte, že přímka procházející body A a B je normálou k tečně grafu funkce f v bodě x_1 .*