4. domácí úloha z MIN201, jaro 2024

Zadáno: 29. 4. 2024 Odevzdejte do: 6. 5. 2024

Příklad 1 (Integrál)**.** *Spočítejte neurčitý integrál*

$$\int \ln(\cos x)\cos x \,\mathrm{d}x$$

[Postup: Použijte per partes a upravte zlomek tak, abyste mohli použít substituci $t = \sin x$.]

Řešení.

$$\int \ln(\cos x)\cos x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln(\cos x) & u' = \frac{-\sin x}{\cos x} \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{vmatrix} = \ln(\cos x)\cdot \sin x - \int \frac{-\sin x}{\cos x}\cdot \sin x \,\mathrm{d}x$$

$$= \ln(\cos x)\cdot \sin x + \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \ln(\cos x)\cdot \sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| - \sin x + C$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \\ \cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-t^2 \end{vmatrix} = \int \frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1-(1-t^2)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1-t^2} - 1\,\mathrm{d}t = \int \frac{\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t} - 1\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|1+t| - t + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| - \sin x + C \quad (*) \qquad \triangle$$

Úvod k příkladu. Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými je rovnice tvaru

$$y'(x) = f(x)\cdot g(y),$$

kde $y(x)$ je funkce, kterou hledáme – tedy závislá proměnná, x je nezávislá proměnná, f a g jsou známé funkce – nějaký výraz v proměnné x a y.

Řeší se takto:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = f(x)\cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Např. $y' = x \cdot e^y$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0$ vyřešíme následovně

$$\int e^{-y}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -e^{-y} = \frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad y = -\ln\left(-C - \frac{x^2}{2}\right),\ C \in \mathbb{R}$$

Dosadíme do obecného řešení $x = 0$ a zjistíme $C = -1$, tedy $y(x) = -\ln(1 - \frac{x^2}{2})$.

Příklad 2 (Vypouštění vody z nádrže)**.** *Válcová nádoba o poloměru 10 cm je naplněná vodou. U dna má otvor o poloměru 1 cm, kterou voda vytéká. Podle* Toricelliho zákona *je rychlost výtoku v m/s dána rovnicí*

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{1}$$

Sestrojte diferenciální rovnici pro funkci $h(t)$ znázorňující závislost výšky hladiny vody na čase. Tuto rovnici vyřešte nejprve obecně, poté pro $h(0) = 1\,m$.

[Postup: Po vynásobení rovnice (1) *obsahem otvoru dostaneme rovnici vyjadřující změnu objemu v čase, tedy $V'(t)$. Objem kapaliny v nádobě dostaneme ze vzorce pro objem válce. Ten zderivujeme a položíme rovno vynásobenému* (1) *s opačným znaménkem. Vzniklou rovnici vyřešíme separací proměnných – na jedné straně bude jen konstantní funkce.]*

Řešení. Obsah otvoru je $S = \pi r^2$ (dosadíme později). Rovnice (1) vyjadřuje rychlost v m/s, vynásobíme-li ji obsahem otvoru, dostaneme okamžitou rychlost v m^3/s, tj.

$$V'(t) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \pi r^2 \sqrt{2g \cdot h(t)},$$

přičemž je důležité si uvědomit, že výška kapaliny se také mění v čase, a znaménko mínus máme kvůli tomu, že objemu ve válci touto rychlostí ubývá.

Funkce $V(t)$ závisí na $h(t)$ podle vzorce pro objem válce (poloměr válce označíme R).

$$V'(t) = \left(\pi R^2 h(t)\right)' = \pi R^2 \, h'(t)$$

Dostáváme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme podle postupu uvedeného před zadáním příkladu.

$$\begin{aligned}
\pi R^2 h'(t) &= -\pi r^2 \sqrt{2g} \cdot h(t)^{\frac{1}{2}} \\
h(t)^{-\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= -\sqrt{2g} \cdot \frac{r^2}{R^2} \\
\int h^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}h &= \int -\sqrt{2g} \cdot \frac{r^2}{R^2} \, \mathrm{d}t \\
\frac{h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} &= -\sqrt{2g} \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot t + C \\
h(t) &= \left(\frac{C}{2} - \frac{\sqrt{2g}}{2} \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot t \right)^2
\end{aligned}$$

Dosazením $\frac{1}{2}\sqrt{2g} \cdot \frac{r^2}{R^2} \doteq \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot \frac{0,01^2}{0,1^2} \doteq 0,022$ a přeznačemením konstanty $D := 2C$ dostáváme

$$h(t) = (D - 0,022\, t)^2, \quad D \in \mathbb{R}^+,$$

přičemž $D \in \mathbb{R}^+$, protože fyzikálně je jasné, že h musí být klesající. Pro počáteční podmínku $h(0) = 1\, m$ dostáváme

$$1 = h(0) = (D - 0)^2 = D^2 \quad \Rightarrow \quad h(t) = (1 - 0,022t)^2 \qquad \triangle$$

Poznámka. Z výsledné rovnice vyplývá, že čas, za jak dlouho se nádrž úplně vypustí závisí přímo úměrně na odmocnině z výšky hladiny. To je zajímavé, to by chtělo experiment :)

Příklad 3 (Odhad čísla π)**.** *Pomocí Taylorova polynomu stupně* 6 *funkce* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *v bodě* $x_0 = 0$ *odhadněte integrál*

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x$$

a pomocí něj odhadněte hodnotu čísla π*.*

[Postup: Funkci $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *si v integrálu nahradíte Taylorovým polynomem, tedy pak integrujete polynom. Nezapomeňtě poté odečíst od integrálu část plochy, abyste dostali výseč a vyjádřili* π*.]*

Řešení. Spočítáme prvních 6 derivací

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1-x^2} && \rightarrow \quad f(0) = 1 \\
f'(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} && \rightarrow \quad f'(0) = 0 \\
f''(x) &= \frac{-1 \cdot \sqrt{1-x^2} - (-x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\frac{-(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} && \rightarrow \quad f''(0) = -1
\end{aligned}$$

$$f'''(x) = \left(-(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)' = \frac{+\frac{3}{2}}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot (-2x) = \frac{-3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad \rightarrow \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-3 \cdot (1-x^2)^{\cancel{\frac{5}{2}}} - (-3x) \cdot \frac{5}{2} \cdot \cancel{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (-2x)}{(1-x^2)^{\cancel{\frac{5}{2}}} \cdot (1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-3-12x^2}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} \quad \rightarrow \quad f^{(4)}(0) = -3$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{(-24x) \cdot (1-x^2) - (-3-12x^2) \cdot \frac{7}{2} \cdot (-2x)}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}} = \frac{-45x-60x^3}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}} \quad \rightarrow \quad f^{(5)}(0) = 0$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{(-45-180x^2) \cdot (1-x^2) - (-45x-60x^3) \cdot \frac{9}{2} \cdot (-2x)}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}} \qquad \rightarrow \quad f^{(5)}(0) = -45$$

Funkci $f(x)$ v integrálu nahradíme Taylorým polynome stupně 6 a zintegrujeme.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{6} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{-3}{4!}x^4 + \frac{-45}{6!}x^6\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6\right) \mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 6} - \frac{1}{32 \cdot 40} - \frac{1}{128 \cdot 112}\right) \doteq 0{,}956\,631$$

Z plochy pod křivkou odečteme dva pravoúhlé trojúhelníky se stranami $\frac{1}{2}$ a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, čímž dostaneme výseč o úhlu 60°, která má obsah $\frac{\pi}{6}$

$$\frac{\pi}{6} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x - 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$\pi \doteq 6 \cdot 0{,}956\,631\,324 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \doteq 3{,}141\,711$$

Spočítaná hodnota se tedy od skutečné hodnoty liší na 4. desetinném místě. △

Bonusový příklad. *Nalezněte předpis (stačí rekurentně zapsaný) pro koeficienty* $a_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$ *Taylorovy řady funkce* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *se středem v* $x_0 = 0$*. Z nich integrací Taylorovy řady vyjádřete (rekurentně) koeficienty* b_n *řady*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Úvod k příkladu. Pro stejnoměrně konvergentní posloupnosti funkcí platí, že můžeme „prohazovat“ limity s integrálem nebo derivací. Protože mocninné řady konvergují stejnoměrně na libovolném uzavřeném ohraničeném podintervalu oboru konvergence, platí pro $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$\int s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n\,\mathrm{d}x = C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n, \text{pro } C \in \mathbb{R}$$

$$s'(x) = \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

Příklad 4 (Hodnota mocninné řady)**.** *Vyjádřete součet následující mocninné pomocí elementárních funkcí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$$

a určete poloměr konvergence.

[Postup: Chcete integrovat řadu $\sum x^{4n-4}$*. Pomocí pravidla* $x^{a \cdot b} = (x^a)^b$ *si ji upravte a přeindexujte, abyste jej mohli vyjádřit pomocí součtu geometrické řady* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$*. Zintegrujte řadu* $\sum x^{4n-4}$ *(člen po členu) i funkci, které se tato řada rovná.]*

Řešení. Díky stejnoměrné konvergenci mocninných řad si můžeme vyjádřit hledanou řadu pomocí integrálu řady $\sum x^{4n-4}$.

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int x^{4n-4} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + C$$

Nyní potřebujeme najít součet řady $\sum x^{4n-n}$, ten zjistíme úpravou do geometrické řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n-1}\right)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^4\right)^n = \frac{1}{1-x^4}$$

Získanou funkci chceme integrovat, k tomu ji potřebujeme rozložit na parciální zlomky.

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

$$1 = A(1+x)(1+x^2) + B(1-x)(1+x^2) + (Cx+D)(1+x)(1-x)$$
$$1 = (A-B-C)x^3 + (A+B-D)x^2 + (A-B+C)x + (A+B+D)$$

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad 1 = A \cdot 4 &\to&\quad A = \frac{1}{4} \\ x = -1: &\quad 1 = B \cdot 4 &\to&\quad B = \frac{1}{4} \\ x = 0: &\quad 1 = A + B + D &\to&\quad D = \frac{1}{2} \\ x^3: &\quad 0 = A - B - C &\to&\quad C = 0 \end{aligned}$$

Dohromady dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} = \int \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-x^4} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/4}{1+x} + \frac{1/2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{-1}{4} \ln|1-x| + \frac{1}{4} \ln|1+x| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C,$$

dosazením $x = 0$ do řady a do výsledné funkce dostaneme $0 = 0 + 0 + C$, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x. \qquad \triangle$$