4. DOMÁCÍ ÚLOHA Z MIN201, JARO 2024

ZADÁNO: 29. 4. 2024 ODEVZDEJTE DO: 6. 5. 2024

Příklad 1 (Integrál). *Spočítejte neurčitý integrál*

$$\int \ln(\cos x) \cos x \,\mathrm{d}x$$

[Postup: Použijte per partes a upravte zlomek tak, abyste mohli použít substituci $t = \sin x$.]

Úvod k příkladu. Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými je rovnice tvaru

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y),$$

kde $y(x)$ je funkce, kterou hledáme – tedy závislá proměnná, x je nezávislá proměnná, f a g jsou známé funkce – nějaký výraz v proměnné x a y.

Řeší se takto:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = f(x) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)} \,\mathrm{d}y = \int f(x) \,\mathrm{d}x$$

Např. $y' = x \cdot e^y$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0$ vyřešíme následovně

$$\int e^{-y} \,\mathrm{d}y = \int x \,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -e^{-y} = \frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad y = -\ln\left(-C - \frac{x^2}{2}\right), \ C \in \mathbb{R}$$

Dosadíme do obecného řešení $x = 0$ a zjistíme $C = -1$, tedy $y(x) = -\ln(1 - \frac{x^2}{2})$.

Příklad 2 (Vypouštění vody z nádrže). *Válcová nádoba o poloměru 10 cm je naplněná vodou. U dna má otvor o poloměru 1 cm, kterou voda vytéká. Podle* Toricelliho zákona *je rychlost výtoku v m/s dána rovnicí*

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{1}$$

Sestrojte diferenciální rovnici pro funkci $h(t)$ znázorňující závislost výšky hladiny vody na čase. Tuto rovnici vyřešte nejprve obecně, poté pro $h(0) = 1\,m$.

[Postup: Po vynásobení rovnice (1) *obsahem otvoru dostaneme rovnici vyjadřující změnu objemu v čase, tedy $V'(t)$. Objem kapaliny v nádobě dostaneme ze vzorce pro objem válce. Ten zderivujeme a položíme rovno vynásobenému* (1) *s opačným znaménkem. Vzniklou rovnici vyřešíme separací proměnných – na jedné straně bude jen konstantní funkce.]*

Příklad 3 (Odhad čísla π). *Pomocí Taylorova polynomu stupně* 6 *funkce $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ odhadněte integrál*

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} \,\mathrm{d}x$$

a pomocí něj odhadněte hodnotu čísla π.

[Postup: Funkci $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ si v integrálu nahradíte Taylorovým polynomem, tedy pak integrujete polynom. Nezapomeňtě poté odečíst od integrálu část plochy, abyste dostali výseč a vyjádřili π.]

Bonusový příklad. *Nalezněte předpis (stačí rekurentně zapsaný) pro koeficienty $a_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$ Taylorovy řady funkce $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ se středem v $x_0 = 0$. Z nich integrací Taylorovy řady vyjádřete (rekurentně) koeficienty b_n řady*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Úvod k příkladu. Pro stejnoměrně konvergentní posloupnosti funkcí platí, že můžeme „prohazovat“ limity s integrálem nebo derivací. Protože mocninné řady konvergují stejnoměrně na libovolném uzavřeném ohraničeném podintervalu oboru konvergence, platí pro $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$\int s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n\,\mathrm{d}x = C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n, \text{pro } C \in \mathbb{R}$$

$$s'(x) = \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

Příklad 4 (Hodnota mocninné řady)**.** *Vyjádřete součet následující mocninné pomocí elementárních funkcí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$$

a určete poloměr konvergence.

[Postup: Chcete integrovat řadu $\sum x^{4n-4}$. Pomocí pravidla $x^{a\cdot b} = (x^a)^b$ si ji upravte a přeindexujte, abyste jej mohli vyjádřit pomocí součtu geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Zintegrujte řadu $\sum x^{4n-4}$ (člen po členu) i funkci, které se tato řada rovná.]