5. domácí úloha z MIN201, jaro 2024

Zadáno: 17. 5. 2024 Odevzdejte do: 26. 5. 2024

Úvod k příkladu. Fourierova řada $F(x)$ funkce s komplexními hodnotami $f(x)$ na intervalu $[-T/2, T/2]$ je řada

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n x},$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a koeficienty c_n spočítáme

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega n x}\,\mathrm{d}x.$$

(Pozor na opačné znaménko v exponentu.)

Příklad 1 (Komplexní obecná Fourierova řada)**.** *Nalezněte Fourierovu řadu pro půlkružnici v komplexní rovině, tj. pro funkci*

$$f(x) = \begin{cases} e^{ix} & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \textit{jinde} \end{cases}$$

Přesněji, nalezněte periodické prodloužení funkce f na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Prvních 7 členů řady vypište, tj. členy pro $n = 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3$.

Řešení. Perioda $T = \pi$, tedy $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ix} e^{-i2nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i(2n-1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-i(2n-1)x}}{-i(2n-1)}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{e^{-i(\frac{\pi}{2}-n\pi)x} - e^{-i(n\pi-\pi/2)x}}{-i(2n-1)} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n i - (-1)^n(-i)}{-i(2n-1)} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n - (-1)^{n+1}}{-(2n-1)} = \frac{(-1)^n\cdot 2}{(1-2n)\pi} \end{aligned}$$

Prvních 7 členů řady tedy je:

$$F(x) \approx \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi}e^{-ix} + \frac{2}{\pi}e^{ix} + \frac{2}{5\pi}e^{-i2x} - \frac{2}{3\pi}e^{i2x} - \frac{2}{7\pi}e^{-i3x} + \frac{2}{5\pi}e^{i3x}.$$ △

Poznámka. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, tj. funkce reálné proměnné s komplexními hodnotami, si můžeme představit jako parametrické křivky v komplexní rovině (parametrizace $x \mapsto [\operatorname{Re} f(x), \operatorname{Im} f(x)]$). U komplexní Fourierovy řady budou tedy trajektorie částečných součtů aproximovat trajektorii funkce f. Pro první pár členů můžete dosadit do WolframAlpha a nechat si vykreslit trajektorii pomocí příkazu: `parametric plot of {Re[F(x)], Im[F(x)]} where F = ...`

Příklad 2 (Konvoluce)**.** *Spočítejte konvoluci $f * g$ funkcí $f = x^2$ a*

$$g = \operatorname{sgn}_\delta(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-\delta, 0) \\ 1 & x \in (0, \delta] \\ 0 & \textit{všude jinde} \end{cases}$$

kde $\delta \in \mathbb{R}$ je libovolné konstantní.

[Postup: $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)\,\mathrm{d}x$, přehoďte $t - x$ do f (pomocí substituce) a pak rozdělíte na integrály, podle intervalů, jak je g definované.]

Řešení.

$$\begin{aligned}(f*g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \operatorname{sgn}_\delta(t-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (t-x)^2 \cdot \operatorname{sgn}_\delta(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{-\delta} (t-x)^2 \cdot 0\,\mathrm{d}x + \int_{-\delta}^{0} (t-x)^2 \cdot (-1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\delta} (t-x)^2 \cdot 1\,\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\infty} (t-x)^2 \cdot 0\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{(t-x)^3}{(-1)\cdot 3} \cdot (-1)\right]_{-\delta}^{0} + \left[\frac{(t-x)^3}{(-1)\cdot 3}\right]_{0}^{\delta} = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{(t+\delta)^3}{3}\right) + \left(-\frac{(t-\delta)^3}{3} + \frac{t^3}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2t^3 - (t^3 + 3t^2\delta + 3t\delta^2 + \delta^3) - (t^3 - 3t^2\delta + 3t\delta^2 - \delta^3)\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (-6t\delta^2) = -2t\delta^2\end{aligned}$$

△

Bonusový příklad (Derivace z konvoluce)**.** *Dokažte, že pro diferencovatelnou funkci f a funkci* $\operatorname{sgn}_\delta$ *z minulého příkladu platí*

$$f'(t) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{-1}{\delta^2} (f * \operatorname{sgn}_\delta)(t).$$

Poznámka. Jedno z využití (diskrétní verze) konvoluce v počítačové grafice je pro detekci hran, kdy se pro každý pixel berou rozdíly okolních pixelů.

Příklad 3. *Dokažte, že pokud pro funkci f s konečným nevlastním integrálem $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ a pro funkci g takovou, že $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$ platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[Postup: Rozepište si konvoluci, trochu upravte a pomocí Fubiniho věty prohoďte dva integrály.]

Řešení.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t \overset{Fubini}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\,\mathrm{d}t\right)}_{=1} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

△

Poznámka. Konvoluce se občas vysvětluje jako rozmazání. Uvažme $(f*g)(t)$ jako funkci intenzity (jasu) pixelů rozmazaného obrázku. Rozmazávací funkce g by nám říkala, jak na intenzitu konkrétního pixelu t mají vliv okolní pixely $t-x$ ostrého obrázku f. Navíc při vlastnosti g z minulého příkladu bude souhrnná intenzita ostrého a rozmazaného obrázku stejná, což asi chceme.

Naopak, z rozmazaného obrázku bychom mohli získat ostrý originál, kdybychom znali rozmazávací funkci g. Pak lze využít vlastnosti Fourierovy transformace:

$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) \quad \Rightarrow \quad f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(f*g)}{\mathcal{F}(g)}\right)$$

V praxi jsme samozřejmě navíc omezeni velikostí pixelů.

Bonusový příklad. *Dokažte, že pro libovolné $\omega \in \mathbb{R}$ a libovolnou rozumnou funkci g je funkce $e^{i\omega x}$ vlastním vektorem funkcionálu $\mathcal{C}_g(f) = f * g$, neboli*

$$\mathcal{C}_g(e^{i\omega x})(t) = (e^{i\omega x} * g)(t) = C \cdot e^{i\omega t}, \quad \textit{kde } C \in \mathbb{C}.$$

Poznámka. Přepsáním C do goniometrického tvaru dostaneme $C \cdot e^{i\omega x} = A \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\omega x}$ pro $A \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi)$. Tedy konvoluce nám zachovává frekvenci, ale může změnit amplitudu a fázi, tj. „vertikálně natáhnout a horizontálně posunout sinusoidu“.