5. DOMÁCÍ ÚLOHA Z MIN201, JARO 2024

ZADÁNO: 17. 5. 2024 ODEVZDEJTE DO: 26. 5. 2024

Úvod k příkladu. Fourierova řada $F(x)$ funkce s komplexními hodnotami $f(x)$ na intervalu $[-T/2, T/2]$ je řada

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n x},$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a koeficienty c_n spočítáme

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega n x}.$$

(Pozor na opačné znaménko v exponentu.)

Příklad 1 (Komplexní obecná Fourierova řada)**.** *Nalezněte Fourierovu řadu pro půlkružnici v komplexní rovině, tj. pro funkci*

$$f(x) = \begin{cases} e^{ix} & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \textit{jinde} \end{cases}$$

Přesněji, nalezněte periodické prodloužení funkce f na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Prvních 7 členů řady vypište, tj. členy pro $n = 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3$.

Poznámka. Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, tj. funkce reálné proměnné s komplexními hodnotami, si můžeme představit jako parametrické křivky v komplexní rovině (parametrizace $x \mapsto [\operatorname{Re} f(x), \operatorname{Im} f(x)]$). U komplexní Fourierovy řady budou tedy trajektorie částečných součtů aproximovat trajektorii funkce f. Pro první pár členů můžete dosadit do WolframAlpha a nechat si vykreslit trajektorii pomocí příkazu: `parametric plot of {Re[F(x)], Im[F(x)]} where F = ...`

Příklad 2 (Konvoluce)**.** *Spočítejte konvoluci $f * g$ funkcí $f = x^2$ a*

$$g = \operatorname{sgn}_\delta(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-\delta, 0) \\ 1 & x \in (0, \delta] \\ 0 & \textit{všude jinde} \end{cases}$$

kde $\delta \in \mathbb{R}$ je libovolné konstantní.

[Postup: $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t - x)\,\mathrm{d}x$, přehoďte $t - x$ do f (pomocí substituce) a pak rozdělíte na integrály, podle intervalů, jak je g definované.]

Bonusový příklad (Derivace z konvoluce)**.** *Dokažte, že pro diferencovatelnou funkci f a funkci $\operatorname{sgn}_\delta$ z minulého příkladu platí*

$$f'(t) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{-1}{\delta^2} (f * \operatorname{sgn}_\delta)(t).$$

Poznámka. Jedno z využití (diskrétní verze) konvoluce v počítačové grafice je pro detekci hran, kdy se pro každý pixel berou rozdíly okolních pixelů.

Příklad 3. *Dokažte, že pokud pro funkci f s konečným nevlastním integrálem $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ a pro funkci g takovou, že $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$ platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[Postup: Rozepište si konvoluci, trochu upravte a pomocí Fubiniho věty prohoďte dva integrály.]

Poznámka. Konvoluce se občas vysvětluje jako rozmazání. Uvažme $(f * g)(t)$ jako funkci intenzity (jasu) pixelů rozmazaného obrázku. Rozmazávací funkce g by nám říkala, jak na intenzitu konkrétního pixelu t mají vliv okolní pixely $t - x$ ostrého obrázku f. Navíc při vlastnosti g z minulého příkladu bude souhrnná intenzita ostrého a rozmazaného obrázku stejná, což asi chceme.

Naopak, z rozmazaného obrázku bychom mohli získat ostrý originál, kdybychom znali rozmazávací funkci g. Pak lze využít vlastnosti Fourierovy transformace:

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) \quad \Rightarrow \quad f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(f * g)}{\mathcal{F}(g)}\right)$$

V praxi jsme samozřejmě navíc omezeni velikostí pixelů.

Bonusový příklad. *Dokažte, že pro libovolné $\omega \in \mathbb{R}$ a libovolnou rozumnou funkci g je funkce $e^{i\omega x}$ vlastním vektorem funkcionálu $\mathcal{C}_g(f) = f * g$, neboli*

$$\mathcal{C}_g(e^{i\omega x})(t) = (e^{i\omega x} * g)(t) = C \cdot e^{i\omega t}, \quad \textit{kde } C \in \mathbb{C}.$$

Poznámka. Přepsáním C do goniometrického tvaru dostaneme $C \cdot e^{i\omega x} = A \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\omega x}$ pro $A \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi)$. Tedy konvoluce nám zachovává frekvenci, ale může změnit amplitudu a fázi, tj. „vertikálně natáhnout a horizontálně posunout sinusoidu“.