Bonusový příklad

$$15^{\log_5 3} \cdot x^{1+\log_5 9x} = 1$$

$$\log_5\left(15^{\log_5 3}\right) + \log_5\left(x^{1+\log_5 9x}\right) = 0$$

$$\log_5 3 \cdot \log_5 15 + (1+\log_5 9x)\cdot \log_5 x = 0$$

$$\log_5 3(\log_5 3 + \overset{1}{\log_5 5}) + (1+\log_5 3 + \log_5 3 + \log_5 x)\log_5 x = 0$$

substituce $\log_5 3 = A$ ; $\log_5 x = B$

$$A(A+1) + (1+A+A+B)\cdot B = 0$$

$$A^2 + A + B + 2B + B^2 = 0$$

$$(A+B) + (A^2 + 2B + B^2) = 0$$

$$(A+B) + (A+B)^2 = 0$$

substituce $(A+B) = C$

$$c^2 + c = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-0}}{2} \quad c_1 = \frac{0}{2} = \underline{0} \qquad c_2 = \frac{-2}{2} = \underline{-1}$$

1\. řešení

$\Rightarrow A+B = 0$

$\log_5 3 + \log_5 x_1 = 0$

$\log_5 3x_1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$

2\. řešení

$\Rightarrow A+B = -1$

$A+B+1 = 0$

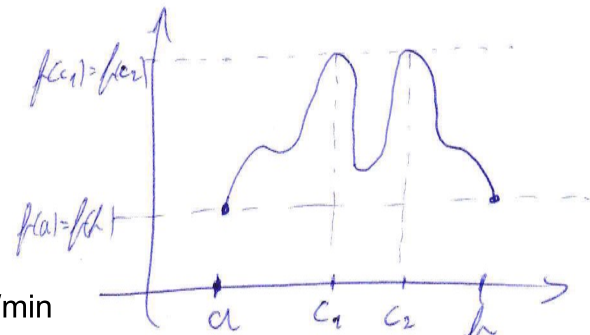
$\log_5 3 + \log_5 x_2 + \log_5 5 = 0$

$\log_5 15x_2 = 0$

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{15}$

## Bonusový příklad (vylepšená věta o střední hodnotě)

Pro názornost nejprve dokáži pro speciální případ f(a)=f(b).




Z nákresu je patrné, že pro funkci f(x) splňující podmínky pro Lagrangeovu větu o stř. hodnotě na intervalu [a,b]. Tedy spojitou na [a,b] a diferencovatelnou na (a,b) bude platit pro f(a)=f(b) věta Rolleova. Tedy bude existovat alespoň jeden bod f'(c)=0 max/min funkce f(x). Tečna funkce v bodě c pak bude konstantní funkce g(x)=f(c). Pokud bude existovat jediný bod c splňující f'(c)=0 je zřejmé, že pro x(a,b) bude platit g(x)>=f(x) pro c maximum a g(x)<=f(x) pro c minimum. Pro případ konstantní funkce bude g(x)=f(c) na celém intervalu [a,b].

Pro R je [a,b] uzavřená množina, f(x) je na intervalu [a,b] spojitá, a tak je množina i ohraničená (kompaktní). Dle topologické charakterizace spojitosti bude pro spojitou funkci platit, že obrazem kompaktní množiny je opět kompaktní množina, která bude obsahovat supremum a infimum.
=> f(x) bude mít na [a,b] buď maximum, nebo minimum cx splňující, že tečna g(cx)>=f(x), nebo g(cx)<=f(x).

Důkaz pro speciální případ f(a)=f(b) lze zobecnit aby splňoval Lagrangeovu větu o stř. hodnot.

Zavedeme funkci h(x):

$$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

h(x) bude rozdílem nějaké funkce f(x) a přímky. Oba procházející body [a,f(a)] a [b,f(b)]

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

=> h(a)=h(b) )

Obdobně bude tedy existovat alespoň jeden bod splňující h'()=0 pro který bude platit naše "vylepšená věta o střední hodnotě".