Bonusový příklad (Taylor rekurentně) $\boxed{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx}$

Z předchozího příkladu víme, že koeficienty a_n jsou

$a_0=1;\ a_2=\frac{-1}{2!};\ a_4=\frac{-3}{4!};\ a_6=\frac{-45}{6!}$ dopočítal jsem $\to a_8=\frac{-1575}{8!};\ a_{10}\ \frac{-99225}{10!}$

Horní čísla jsem rozložil na součiny:

$$\begin{aligned}
1 &= a_{2\cdot 0} = a_0 = 1\\
-1 &= a_{2\cdot 1} = a_2 = -1\cdot 1\\
-3 &= a_{2\cdot 2} = a_4 = -1\cdot \underline{1\cdot 3}\\
-45 &= a_{2\cdot 3} = a_6 = -1\cdot 1\cdot 3\cdot \underline{3\cdot 5}\\
-1575 &= a_{2\cdot 4} = a_8 = -1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot \underline{5\cdot 7}\\
-99225 &= a_{2\cdot 5} = a_{10} = -1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot (3\cdot 3)\cdot 5\cdot 7\cdot \underline{7\cdot 9}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{(2n-3)(2n-1)}{a_{2n}=a_{2n-2}(2n-3)(2n-1)}$$

$$\Rightarrow a_{2n+2} = \frac{a_{2n}(2n-1)(2n+1)(2n!)}{(2n+2)!} \neq \frac{a_{2n}(2n-1)\cancel{(2n+1)}\cancel{(2n!)}}{(2n+2)\cancel{(2n+1)}\cancel{(2n!)}}$$

Smíh dosazení z předchozího člen

$a_{2n+2} = a_{2n}\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)$ Taylorovu řadu v $x_0=0$ lze vyjádřit jako

$$\boxed{T_0^{\infty} = \overset{a_0}{1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\frac{(2n-1)}{(2n+2)}x^{2n+2}}$$

$$\int_{-1}^{1} T_0^{\infty}\,dx \overset{\text{sudá fce}}{=} 2\cdot\int_0^1 1\,dx + 2a_{2n}\frac{(2n-1)}{(2n+2)}\int_0^1 x^{2n+2}\,dx =$$

rekurentní vztah platí jen zde

$$= 2[x]_0^1 + 2a_{2n}\frac{(2n-1)}{(2n+2)}\left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 = 2\left(\overset{b_0}{1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}\frac{(2n-1)}{(2n+2)}\frac{c_{2n}}{(2n+3)}\right)$$

Z předchozího příkladu víme, že součty řady v $\int_{-1}^{1}$ by měli být

$b_0=1;\ b_2=\frac{-1}{6};\ b_4=\frac{-1}{40};\ b_6=\frac{-1}{112}$

$$\left.\begin{aligned}
a_0=1;\ b_0=1 &\Rightarrow c_0=\frac{a_0}{b_0}=1=(2\cdot 0+1)\\
a_2=\frac{-1}{2};\ b_2=\frac{-1}{6} &\Rightarrow c_2=\frac{a_2}{b_2}=3=(2\cdot 1+1)\\
a_4=\frac{-3}{24};\ b_4=\frac{-1}{40} &\Rightarrow c_4=\frac{a_4}{b_4}=5=(2\cdot 2+1)\\
a_6=\frac{-45}{720};\ b_6=\frac{-1}{112} &\Rightarrow c_6=\frac{a_6}{b_6}=7=(2\cdot 3+1)
\end{aligned}\right\}\Rightarrow c_{2n}=(2n+1)$$

$$\Rightarrow 2+2\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{\pi}{2}$$