1. vnitrosemestrální písemná práce z MIN201, jaro 2024

Jméno: Datum: 18. 4. 2024

UČO:

Příklad 1 (3b)**.** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1-2x}{3x^2},$$

především určete definiční obor, obor hodnot a určete na jakých intervalech je funkce rostoucí/klesající a konvexní/konkávní.

Řešení. Definiční obor je zřejmě $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

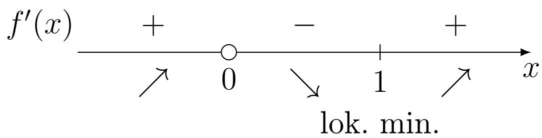
Nejprve spočítáme první a druhou derivaci.

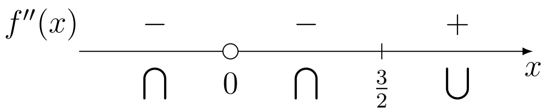
$$f'(x) = \frac{-2 \cdot 3x^2 - (1-2x) \cdot 6x}{(3x^2)^2} = \frac{6x^2 - 6x}{9x^4} = \frac{2x-2}{3x^3}$$
$$f''(x) = \frac{2 \cdot 3x^3 - (2x-2) \cdot 9x^2}{(3x^3)^2} = \frac{-12x^3 + 18x^2}{9x^6} = \frac{-4x+6}{3x^4}$$

Nalezneme jejich nulové body (v prvním případě se to nazývá stacionární bod.)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Určíme, kde má $f'(x)$ a $f''(x)$ kladné/záporné znaménko. Znaménko se může změnit pouze v nulovém bodě nebo bodě nespojitosti. Tedy máme rozdělenou reálnou osu na podintervaly a jejich znaménko zjistíme dosazením libovolného bodu zevnitř intervalu.



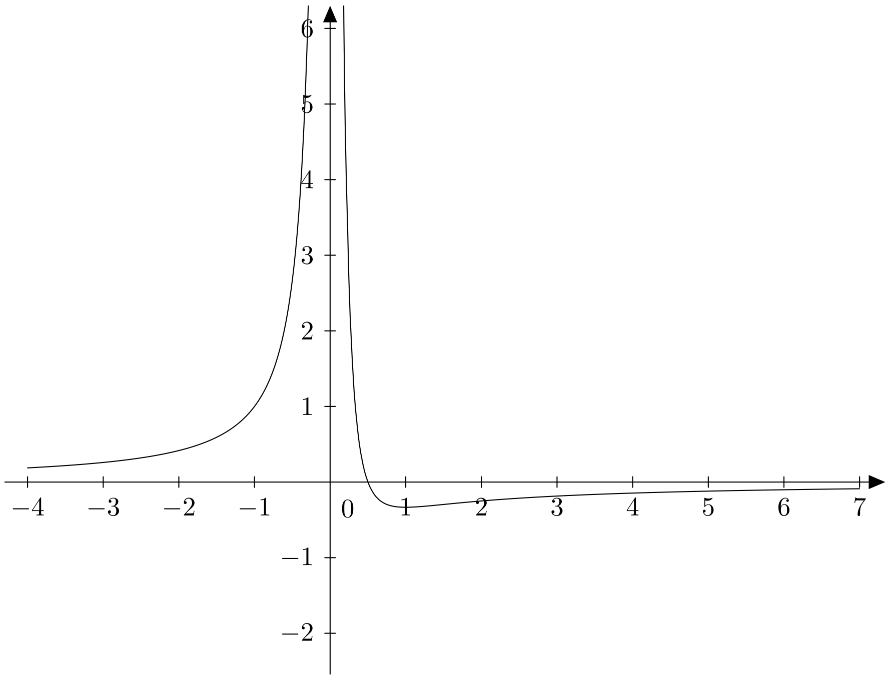


Funkce je tedy rostoucí na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(1, \infty)$ a klesající na $(0, 1)$. Konvexní je na $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{3}{2})$ a konkávní na $(\frac{3}{2}, \infty)$.

Ve stacionárním bodě $x = 1$ je lokální minimum. Abychom věděli, jakých nejnižších a nejvyšších hodnot funkce nabývá, potřebujeme ještě spočítat následující limity.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x}{3x^2} = \left|\frac{2x}{3x^2} = \frac{1}{\infty}\right| = 0, \quad \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1-2x}{3x^2} = \left|\frac{1}{0^+}\right| = \infty$$

V bodě $x = 1$ je tedy i globální maximum a funkce nabývá libovolně velkých hodnot, tedy $H(f) = [1, \infty)$.



△

Příklad 2 (3b)**.** Zpočítejte následující limity:

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x} \qquad 2)\quad \lim_{x\to 0}\ln(e^x-1)-\ln(x) \qquad 3)\ \lim_{x\to -\infty} xe^x$$

Řešení.

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \left|\frac{1-\sqrt[3]{1-0}}{0}=\frac{0}{0}\right| \overset{\ell' H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-1)}{1} = \frac{\frac{1}{3}(1-0)^{-\frac{2}{3}}}{1} = \frac{1}{3}$$

$$2)\quad \lim_{x\to 0^+}\ln(e^x-1)-\ln(x)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\right) = \left|\ln\left(\frac{0}{0}\right)\right| \overset{\ell' H}{=} \ln\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{1}\right) = \ln(1) = 0$$

$$3)\quad \lim_{x\to -\infty} xe^x = \lim_{x\to -\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \left|\frac{\infty}{e^\infty}=\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{\ell' H}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = \left|\frac{1}{-\infty}\right| = 0$$

△

Příklad 3 (3b)**.** Pomocí Taylorova polynomu funkce $\operatorname{tg} x$ stupně 2 se středem v $x_0 = 0$ odhadněte hodnotu $\operatorname{tg} 1$.

Řešení.

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg} x & &\to & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} & &\to & f'(0) &= \frac{1}{1} = 1 \\ f''(x) &= \frac{-2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x} & &\to & f''(0) &= \frac{2\cdot 1\cdot 0}{1} = 0 \end{aligned}$$

$$T_0^2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)$$

$$\operatorname{tg} 1 \approx 0 + 1\cdot(1-0) + \frac{0}{2}\cdot(1-0)^2 = 1$$

△

Příklad 4 (1b)**.** Uvažme funkce $f(x)$ a $g(x)$. Oboje funkce jsou rostoucí na $\mathbb{R}$. Dále $f(x)$ je konvexní na $\mathbb{R}$, $g(x)$ je konkávní na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, jaké jsou možnosti počtu protnutí jejich grafů.

[Nápověda: Vezměte funkci $h(x) = f(x) - g(x)$ a ukažte, že $h(x)$ má pouze jedno minimum.]

Řešení. Funkce $h(x)$ je konvexní na $\mathbb{R}$

$$h''(x) = \underbrace{f''(x)}_{>0} - \underbrace{g''(x)}_{<0} > 0,$$

tedy $h'(x)$ je rostoucí, protože na $\mathbb{R}$

$$\big(h'(x)\big)' = h''(x) > 0.$$

Rostoucí funkce „může protnout osu x“, tedy $h'(x) = 0$, nejvýše v jednom bodě x_{min}. (Nemusí se však rovnat nule, uvažme např. funkci e^x.) Pokud takový bod existuje, pak je v tomto bodě minimum, protože $h(x)$ je všude konvexní. Mohou nastat tyto možnosti:

1) $h'(x) > 0$ na $\mathbb{R}$, tedy $h(x)$ je rostoucí a nemá minimum
   a) $h(x) > 0$ na $\mathbb{R}$, tedy $f(x)$ a $g(x)$ se **neprotínají**
   b) $f(x)$ a $g(x)$ se protínají **v jednom bodě**
2) $h'(x_{min}) = 0$, tedy $h(x)$ na $(-\infty, x_{min})$ klesající a na (x_{min}, ∞) rostoucí
   a) $h(x_{min}) > 0$, funkce $f(x), g(x)$ se **neprotínají**
   b) $h(x_{min}) = 0$ a $h'(x_{min}) = 0$, funkce se protínají **v jednom bodě** a v tomto bodě jejich tečny splývají
   c) $h(x_{min}) < 0$, pak nalevo i napravo od x_{min} musí protnout osu x, protože $h(x)$ je konvexní; funkce se tedy protnou **dvakrát**

Příklad možnosti 2) jsou vzájemě obrácené paraboly, podpřípady a), b) a c) dostaneme posouváním jedné paraboly po ose y. Příklad možnosti 1) jsou funkce $f(x) = e^x + x$, $g(x) = x - \ln(e^x + 1)$ a jejich posunutí. △