

MUNI
SCI



Matematika II

Integrální počet

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

26. dubna 2023

Obsah

Neurčitý integrál

Určitý integrál

Užití určitého integrálu

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $[a, b]$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $[a, b]$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Označení:

$$F = \int f(x)dx.$$

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $[a, b]$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Označení:

$$F = \int f(x) dx.$$

Alternativní názvy: Funkce F je *neurčitý integrál z funkce* f .

Funkce F je *antiderivace k funkci* f .

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $[a, b]$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Vlastnosti primitivní funkce:

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $[a, b]$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Vlastnosti primitivní funkce:

- Ke každé funkci spojitě na intervalu $[a, b]$ existuje na tomto intervalu funkce primitivní.

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $[a, b]$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Vlastnosti primitivní funkce:

- Ke každé funkci spojitě na intervalu $[a, b]$ existuje na tomto intervalu funkce primitivní.
- Primitivní funkce k dané funkci, pokud existuje, není určena jednoznačně.
Je-li F primitivní k f , pak také $F + c$ je primitivní k f pro libovolnou konstantu c .

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $[a, b]$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Vlastnosti primitivní funkce:

- Ke každé funkci spojitě na intervalu $[a, b]$ existuje na tomto intervalu funkce primitivní.
- Primitivní funkce k dané funkci, pokud existuje, není určena jednoznačně.
Je-li F primitivní k f , pak také $F + c$ je primitivní k f pro libovolnou konstantu c .

- Primitivní funkce je *aditivní*:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $[a, b]$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Vlastnosti primitivní funkce:

- Ke každé funkci spojitě na intervalu $[a, b]$ existuje na tomto intervalu funkce primitivní.
- Primitivní funkce k dané funkci, pokud existuje, není určena jednoznačně.
Je-li F primitivní k f , pak také $F + c$ je primitivní k f pro libovolnou konstantu c .

- Primitivní funkce je *aditivní*:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

- Primitivní funkce je *homogenní*:

$$\int (cf(x)) dx = c \int f(x) dx.$$

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $[a, b]$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Vlastnosti primitivní funkce:

- Ke každé funkci spojitě na intervalu $[a, b]$ existuje na tomto intervalu funkce primitivní.
- Primitivní funkce k dané funkci, pokud existuje, není určena jednoznačně.
Je-li F primitivní k f , pak také $F + c$ je primitivní k f pro libovolnou konstantu c .
- Primitivní funkce je *lineární*:

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\operatorname{cotg} x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x = -\operatorname{arccos} x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| = -\ln \left| x - \sqrt{x^2 \pm 1} \right|$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{arccos} x \right)$$

„Tabulkové integrály“

Příklady:

„Tabulkové integrály“

Příklady:

$$\int (3x^5 - 2x^3 + x^2 - 2) dx$$

„Tabulkové integrály“

Příklady:

$$\int (3x^5 - 2x^3 + x^2 - 2) dx = 3\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x$$

„Tabulkové integrály“

Příklady:

$$\int (3x^5 - 2x^3 + x^2 - 2) dx = 3\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 2x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$$

„Tabulkové integrály“

Příklady:

$$\int (3x^5 - 2x^3 + x^2 - 2) dx = 3\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 2x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx &= \int \frac{2x\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} dx = \\ &= \int (2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) dx = 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = (\frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{3}x)\sqrt{x} \end{aligned}$$

„Tabulkové integrály“

Příklady:

$$\int (3x^5 - 2x^3 + x^2 - 2) dx = 3\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 2x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx &= \int \frac{2x\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} dx = \\ &= \int (2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) dx = 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = (\frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{3}x)\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\int \left(\frac{x-1}{3x}\right)^2 dx$$

„Tabulkové integrály“

Příklady:

$$\int (3x^5 - 2x^3 + x^2 - 2) dx = 3\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 2x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx &= \int \frac{2x\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} dx = \\ &= \int (2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) dx = 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{3}x\right)\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x-1}{3x}\right)^2 dx &= \int \frac{x^2 - 2x + 1}{9x^2} dx = \frac{1}{9} \int \left(1 - \frac{2}{x} + x^{-2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{9} \left(x - 2 \ln|x| - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{9} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - \ln x^2\right) \end{aligned}$$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $[F(\varphi(t))]' = \frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $[F(\varphi(t))]' = \frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Odtud: $F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $[F(\varphi(t))]' = \frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Odtud: $F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Použití vzorce:

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $[F(\varphi(t))]' = \frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Odtud: $F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Použití vzorce: **1.** Výpočet integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $[F(\varphi(t))]' = \frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Odtud: $F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Použití vzorce: **1.** Výpočet integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

substituce: $\varphi(x) = s, \quad d\varphi(x) = \varphi'(x)dx = ds$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $[F(\varphi(t))]' = \frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Odtud: $F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Použití vzorce: 1. Výpočet integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

substituce: $\varphi(x) = s, d\varphi(x) = \varphi'(x)dx = ds$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(s)ds = F(s) = F(\varphi(x))$$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $[F(\varphi(t))]' = \frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Odtud: $F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Použití vzorce: **1.** Výpočet integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

substituce: $\varphi(x) = s, d\varphi(x) = \varphi'(x)dx = ds$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(s)ds = F(s) = F(\varphi(x))$$

2. Výpočet integrálu $\int f(x)dx$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $[F(\varphi(t))]' = \frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Odtud: $F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Použití vzorce: **1.** Výpočet integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

substituce: $\varphi(x) = s, d\varphi(x) = \varphi'(x)dx = ds$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(s)ds = F(s) = F(\varphi(x))$$

2. Výpočet integrálu $\int f(x)dx$

substituce: $x = \varphi(s), dx = d\varphi(s) = \varphi'(s)ds$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $[F(\varphi(t))]' = \frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Odtud: $F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Použití vzorce: **1.** Výpočet integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

substituce: $\varphi(x) = s, d\varphi(x) = \varphi'(x)dx = ds$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(s)ds = F(s) = F(\varphi(x))$$

2. Výpočet integrálu $\int f(x)dx$

substituce: $x = \varphi(s), dx = d\varphi(s) = \varphi'(s)ds$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(s))\varphi'(s)ds = F(\varphi(s)) = F(x)$$

Substituční metoda

Příklady:

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

substituce: $\ln x = s$, $\frac{1}{x} dx = ds$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

substituce: $\ln x = s, \frac{1}{x} dx = ds$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx$$

substituce: $x^2 = s$, $2x dx = ds$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^s ds = \frac{1}{2}e^s = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

substituce: $x^2 = s$, $2x dx = ds$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^s ds = \frac{1}{2}e^s = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^s ds = \frac{1}{2}e^s = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^4 + 1} dx$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^s ds = \frac{1}{2}e^s = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx \quad \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx$$

substituce 1: $x^4 + 1 = s$, $4x^3 dx = ds$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^s ds = \frac{1}{2}e^s = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{s} ds$$

$$= \frac{1}{4} \ln |s|$$

substituce 1: $x^4 + 1 = s$, $4x^3 dx = ds$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^s ds = \frac{1}{2}e^s = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{s} ds \\ &= \frac{1}{4} \ln |s| \end{aligned}$$

substituce 1: $x^4 + 1 = s$, $4x^3 dx = ds$

substituce 2: $x^2 = t$, $2x dx = dt$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^s ds = \frac{1}{2}e^s = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{s} ds + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{4} \ln |s| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \end{aligned}$$

substituce 1: $x^4 + 1 = s$, $4x^3 dx = ds$

substituce 2: $x^2 = t$, $2x dx = dt$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^s ds = \frac{1}{2}e^s = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{s} ds + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{4} \ln |s| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 \end{aligned}$$

substituce 1: $x^4 + 1 = s$, $4x^3 dx = ds$

substituce 2: $x^2 = t$, $2x dx = dt$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^s ds = \frac{1}{2}e^s = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{s} ds + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{4} \ln |s| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1 - 5x}{3 - 5x} dx$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^s ds = \frac{1}{2}e^s = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{s} ds + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{4} \ln |s| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1 - 5x}{3 - 5x} dx = \int \frac{3 - 5x - 2}{3 - 5x} dx = \int 1 dx - 2 \int \frac{1}{3 - 5x} dx = x + \frac{2}{5} \int \frac{-5}{3 - 5x} dx$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^s ds = \frac{1}{2}e^s = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{s} ds + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{4} \ln |s| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1 - 5x}{3 - 5x} dx = \int \frac{3 - 5x - 2}{3 - 5x} dx = \int 1 dx - 2 \int \frac{1}{3 - 5x} dx = x + \frac{2}{5} \int \frac{-5}{3 - 5x} dx$$

substituce: $3 - 5x = s$, $-5dx = ds$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^s ds = \frac{1}{2}e^s = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{s} ds + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{4} \ln |s| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - 5x}{3 - 5x} dx &= \int \frac{3 - 5x - 2}{3 - 5x} dx = \int 1 dx - 2 \int \frac{1}{3 - 5x} dx = x + \frac{2}{5} \int \frac{-5}{3 - 5x} dx = \\ &= x + \frac{2}{5} \int \frac{1}{s} ds = x + \frac{2}{5} \ln |s| = x + \frac{2}{5} \ln |3 - 5x| \end{aligned}$$

substituční: $3 - 5x = s$, $-5dx = ds$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int (\sin x)^2 dx$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int (\sin x)^2 dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int (\sin x)^2 dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

substituce: $2x = s$, $2dx = ds$, $dx = \frac{1}{2}ds$

Substituční metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} \int (\sin x)^2 dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \cos s ds = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin s = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

substituce: $2x = s$, $2dx = ds$, $dx = \frac{1}{2}ds$

Substituční metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} \int (\sin x)^2 dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \cos s ds = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin s = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

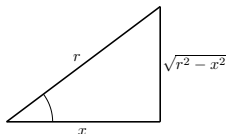
$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} \int (\sin x)^2 dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \cos s ds = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin s = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx$$



Substituční metoda

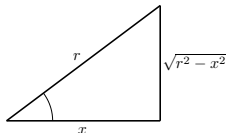
Příklady:

$$\begin{aligned} \int (\sin x)^2 dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \cos s ds = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin s = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

substituce: $x = r \cos s$, $dx = -r \sin s ds$

$$\sqrt{r^2 - (r \cos s)^2} = \sqrt{r^2(1 - (\cos s)^2)} = r \sin s$$



Substituční metoda

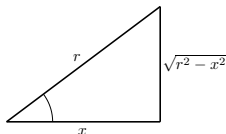
Příklady:

$$\begin{aligned} \int (\sin x)^2 dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \cos s ds = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin s = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx = -r^2 \int (\sin s)^2 ds = \frac{1}{2}r^2(\sin s \cos s - s)$$

substituce: $x = r \cos s$, $dx = -r \sin s ds$

$$\sqrt{r^2 - (r \cos s)^2} = \sqrt{r^2(1 - (\cos s)^2)} = r \sin s$$



Substituční metoda

Příklady:

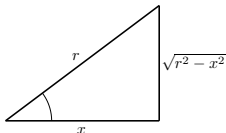
$$\begin{aligned} \int (\sin x)^2 dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \cos s ds = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin s = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx = -r^2 \int (\sin s)^2 ds = \frac{1}{2}r^2(\sin s \cos s - s)$$

substituce: $x = r \cos s$, $dx = -r \sin s ds$

$$\sqrt{r^2 - (r \cos s)^2} = \sqrt{r^2(1 - (\cos s)^2)} = r \sin s$$

$$s = \arccos \frac{x}{r}, \sin s = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r}$$



Substituční metoda

Příklady:

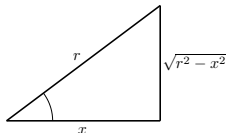
$$\begin{aligned}\int (\sin x)^2 dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \cos s ds = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin s = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= -r^2 \int (\sin s)^2 ds = \frac{1}{2}r^2(\sin s \cos s - s) = \\ &= \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \frac{x}{r} - \arccos \frac{x}{r} \right) = \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{1}{2}r^2 \arccos \frac{x}{r}\end{aligned}$$

substituce: $x = r \cos s$, $dx = -r \sin s ds$

$$\sqrt{r^2 - (r \cos s)^2} = \sqrt{r^2(1 - (\cos s)^2)} = r \sin s$$

$$s = \arccos \frac{x}{r}, \sin s = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r}$$



Substituční metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} \int (\sin x)^2 dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \cos s ds = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin s = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= -r^2 \int (\sin s)^2 ds = \frac{1}{2}r^2 (\sin s \cos s - s) = \\ &= \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \frac{x}{r} - \arccos \frac{x}{r} \right) = \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{1}{2}r^2 \arccos \frac{x}{r} \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}\int (\sin x)^2 dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \cos s ds = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin s = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= -r^2 \int (\sin s)^2 ds = \frac{1}{2}r^2 (\sin s \cos s - s) = \\ &= \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \frac{x}{r} - \arccos \frac{x}{r} \right) = \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{1}{2}r^2 \arccos \frac{x}{r}\end{aligned}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

substituce: $x = s^2$, $dx = 2s ds$

Substituční metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}\int (\sin x)^2 dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \cos s ds = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin s = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= -r^2 \int (\sin s)^2 ds = \frac{1}{2}r^2(\sin s \cos s - s) = \\ &= \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \frac{x}{r} - \arccos \frac{x}{r} \right) = \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{1}{2}r^2 \arccos \frac{x}{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx &= \int \frac{s}{1+s} 2s ds = 2 \int \frac{s^2}{1+s} ds = 2 \int \frac{s^2 - 1 + 1}{s+1} ds = \\ &= \int \left(2s - 2 + 2 \frac{1}{s+1} \right) ds = s^2 - 2s + 2 \ln |s+1| = x - 2\sqrt{x} + \ln(1 + \sqrt{x})^2\end{aligned}$$

substitute: $x = s^2$, $dx = 2s ds$

Substituční metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}\int (\sin x)^2 dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \cos s ds = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin s = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= -r^2 \int (\sin s)^2 ds = \frac{1}{2}r^2(\sin s \cos s - s) = \\ &= \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \frac{x}{r} - \arccos \frac{x}{r} \right) = \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{1}{2}r^2 \arccos \frac{x}{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx &= \int \frac{s}{1+s} 2s ds = 2 \int \frac{s^2}{1+s} ds = 2 \int \frac{s^2 - 1 + 1}{s+1} ds = \\ &= \int \left(2s - 2 + 2 \frac{1}{s+1} \right) ds = s^2 - 2s + 2 \ln |s+1| = x - 2\sqrt{x} + \ln(1 + \sqrt{x})^2\end{aligned}$$

Substituční metoda

Lineární substituce:

$$\int f(ax + b)dx$$

Substituční metoda

Lineární substitute:

$$\int f(ax + b)dx$$

substitute: $ax + b = s$, $adx = ds$, $dx = \frac{1}{a}ds$

Substituční metoda

Lineární substitute:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(s)ds = \frac{1}{a}F(s) = \frac{1}{a}F(ax + b)$$

substitute: $ax + b = s$, $adx = ds$, $dx = \frac{1}{a}ds$

Substituční metoda

Lineární substituce:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(s)ds = \frac{1}{a}F(s) = \frac{1}{a}F(ax + b)$$

substituce: $ax + b = s$, $adx = ds$, $dx = \frac{1}{a}ds$

Logaritmická substituce:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

Substituční metoda

Lineární substitute:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(s)ds = \frac{1}{a}F(s) = \frac{1}{a}F(ax + b)$$

substitute: $ax + b = s$, $adx = ds$, $dx = \frac{1}{a}ds$

Logaritmická substitute:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

substitute: $\ln |f(x)| = s$, $\frac{1}{f(x)}f'(x)dx = ds$

Substituční metoda

Lineární substituce:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(s)ds = \frac{1}{a}F(s) = \frac{1}{a}F(ax + b)$$

substituce: $ax + b = s$, $adx = ds$, $dx = \frac{1}{a}ds$

Logaritmická substituce:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int ds = s = \ln |f(x)|$$

substituce: $\ln |f(x)| = s$, $\frac{1}{f(x)}f'(x)dx = ds$

Substituční metoda

Lineární substituce:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b)$$

Logaritmická substituce:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$$

Integrace „per partes“

Integrace „per partes“

Derivace součinu funkcí:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

Integrace „per partes“

Derivace součinu funkcí:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

odtud

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x),$$

Integrace „per partes“

Derivace součinu funkcí:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

odtud

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x),$$

tedy

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

$$\int (2 - 3x)e^{1-x} dx$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

$$\int (2 - 3x)e^{1-x} dx$$

$$u = 2 - 3x$$

$$v' = e^{1-x}$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

$$\int (2 - 3x)e^{1-x} dx$$

$$\begin{array}{ll} u = 2 - 3x & u' = -3 \\ v' = e^{1-x} & v = -e^{1-x} \end{array}$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

$$\int (2 - 3x)e^{1-x} dx = -(2 - 3x)e^{1-x} - \int 3e^{1-x} dx = (3x - 2)e^{1-x} + 3e^{1-x} = (3x + 1)e^{1-x}$$

$$\begin{array}{ll} u = 2 - 3x & u' = -3 \\ v' = e^{1-x} & v = -e^{1-x} \end{array}$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

$$\begin{aligned}\int (2 - 3x)e^{1-x} dx &= -(2 - 3x)e^{1-x} - \int 3e^{1-x} dx = (3x - 2)e^{1-x} + 3e^{1-x} = \\ &= (3x + 1)e^{1-x}\end{aligned}$$

$$\int \ln x dx$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

$$\begin{aligned} \int (2 - 3x)e^{1-x} dx &= -(2 - 3x)e^{1-x} - \int 3e^{1-x} dx = (3x - 2)e^{1-x} + 3e^{1-x} = \\ &= (3x + 1)e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\int \ln x dx$$

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

$$\begin{aligned} \int (2 - 3x)e^{1-x} dx &= -(2 - 3x)e^{1-x} - \int 3e^{1-x} dx = (3x - 2)e^{1-x} + 3e^{1-x} = \\ &= (3x + 1)e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

$$\begin{aligned} \int (2 - 3x)e^{1-x} dx &= -(2 - 3x)e^{1-x} - \int 3e^{1-x} dx = (3x - 2)e^{1-x} + 3e^{1-x} = \\ &= (3x + 1)e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\int x^2 \cos x dx$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

$$\begin{aligned} \int (2 - 3x)e^{1-x} dx &= -(2 - 3x)e^{1-x} - \int 3e^{1-x} dx = (3x - 2)e^{1-x} + 3e^{1-x} = \\ &= (3x + 1)e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\int x^2 \cos x dx$$

$$\begin{aligned} u &= x^2 & u' &= 2x \\ v' &= \cos x & v &= \sin x \end{aligned}$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

$$\begin{aligned} \int (2 - 3x)e^{1-x} dx &= -(2 - 3x)e^{1-x} - \int 3e^{1-x} dx = (3x - 2)e^{1-x} + 3e^{1-x} = \\ &= (3x + 1)e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$$

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

$$\begin{aligned} \int (2 - 3x)e^{1-x} dx &= -(2 - 3x)e^{1-x} - \int 3e^{1-x} dx = (3x - 2)e^{1-x} + 3e^{1-x} = \\ &= (3x + 1)e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$$

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

$$\begin{aligned} \int (2 - 3x)e^{1-x} dx &= -(2 - 3x)e^{1-x} - \int 3e^{1-x} dx = (3x - 2)e^{1-x} + 3e^{1-x} = \\ &= (3x + 1)e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \int \cos x dx \right)$$

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Příklady:

$$\begin{aligned} \int (2 - 3x)e^{1-x} dx &= -(2 - 3x)e^{1-x} - \int 3e^{1-x} dx = (3x - 2)e^{1-x} + 3e^{1-x} = \\ &= (3x + 1)e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \int \cos x dx \right) = \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x \end{aligned}$$

Další příklady

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx$$

Další příklady

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx = \int x^{2+\frac{1}{2}-5} dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Další příklady

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx = \int x^{2+\frac{1}{2}-5} dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7e^x - \frac{6}{x} \right) dx$$

Další příklady

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx = \int x^{2+\frac{1}{2}-5} dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7e^x - \frac{6}{x} \right) dx = 7e^x - 6 \ln |x| = 7e^x - \ln x^6$$

Další příklady

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx = \int x^{2+\frac{1}{2}-5} dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7e^x - \frac{6}{x} \right) dx = 7e^x - 6 \ln |x| = 7e^x - \ln x^6$$

$$\int (\cotg x)^2 dx$$

Další příklady

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx = \int x^{2+\frac{1}{2}-5} dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7e^x - \frac{6}{x} \right) dx = 7e^x - 6 \ln |x| = 7e^x - \ln x^6$$

$$\int (\cotg x)^2 dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 dx = \int \frac{1 - (\sin x)^2}{(\sin x)^2} dx = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1 \right) dx = \\ = -\cotg x - x$$

Další příklady

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx = \int x^{2+\frac{1}{2}-5} dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7e^x - \frac{6}{x} \right) dx = 7e^x - 6 \ln |x| = 7e^x - \ln x^6$$

$$\int (\cotg x)^2 dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 dx = \int \frac{1 - (\sin x)^2}{(\sin x)^2} dx = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1 \right) dx = \\ = -\cotg x - x$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Další příklady

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx = \int x^{2+\frac{1}{2}-5} dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7e^x - \frac{6}{x} \right) dx = 7e^x - 6 \ln|x| = 7e^x - \ln x^6$$

$$\int (\cotg x)^2 dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 dx = \int \frac{1 - (\sin x)^2}{(\sin x)^2} dx = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1 \right) dx = \\ = -\cotg x - x$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \sqrt{1-x^2} dx = \\ = -\arccos x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arccos x = -\frac{1}{2} \left(\arccos x + x\sqrt{1-x^2} \right)$$

Další příklady

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx = \int x^{2+\frac{1}{2}-5} dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7e^x - \frac{6}{x} \right) dx = 7e^x - 6 \ln |x| = 7e^x - \ln x^6$$

$$\int (\cotg x)^2 dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 dx = \int \frac{1 - (\sin x)^2}{(\sin x)^2} dx = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1 \right) dx = \\ = -\cotg x - x$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \sqrt{1-x^2} dx = \\ = -\arccos x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arccos x = -\frac{1}{2} \left(\arccos x + x \sqrt{1-x^2} \right)$$

$$\int 3e^{-x} dx$$

Další příklady

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx = \int x^{2+\frac{1}{2}-5} dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7e^x - \frac{6}{x} \right) dx = 7e^x - 6 \ln|x| = 7e^x - \ln x^6$$

$$\int (\cotg x)^2 dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 dx = \int \frac{1 - (\sin x)^2}{(\sin x)^2} dx = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1 \right) dx = \\ = -\cotg x - x$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \sqrt{1-x^2} dx = \\ = -\arccos x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arccos x = -\frac{1}{2} \left(\arccos x + x\sqrt{1-x^2} \right)$$

$$\int 3e^{-x} dx = -3e^{-x}$$

Další příklady

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx = \int x^{2+\frac{1}{2}-5} dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7e^x - \frac{6}{x} \right) dx = 7e^x - 6 \ln |x| = 7e^x - \ln x^6$$

$$\int (\cotg x)^2 dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 dx = \int \frac{1 - (\sin x)^2}{(\sin x)^2} dx = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1 \right) dx = \\ = -\cotg x - x$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \sqrt{1-x^2} dx = \\ = -\arccos x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arccos x = -\frac{1}{2} \left(\arccos x + x \sqrt{1-x^2} \right)$$

$$\int 3e^{-x} dx = -3e^{-x}$$

$$\int (3x-7)^{14} dx$$

Další příklady

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx = \int x^{2+\frac{1}{2}-5} dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7e^x - \frac{6}{x} \right) dx = 7e^x - 6 \ln |x| = 7e^x - \ln x^6$$

$$\int (\cotg x)^2 dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 dx = \int \frac{1 - (\sin x)^2}{(\sin x)^2} dx = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1 \right) dx = \\ = -\cotg x - x$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \sqrt{1-x^2} dx = \\ = -\arccos x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arccos x = -\frac{1}{2} \left(\arccos x + x\sqrt{1-x^2} \right)$$

$$\int 3e^{-x} dx = -3e^{-x}$$

$$\int (3x-7)^{14} dx = \frac{1}{3} \frac{(3x-7)^{15}}{15} = \frac{(3x-7)^{15}}{45}$$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx$$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

substituce: $x^2 - 1 = s$, $2x dx = ds$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2} \ln |s| = \ln \sqrt{|x^2 - 1|}$$

substitute: $x^2 - 1 = s$, $2x dx = ds$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2} \ln |s| = \ln \sqrt{|x^2 - 1|}$$

substitute: $x^2 - 1 = s$, $2x dx = ds$

$$\int \operatorname{tg} x dx$$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2} \ln |s| = \ln \sqrt{|x^2 - 1|}$$

substitute: $x^2 - 1 = s$, $2x dx = ds$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2} \ln |s| = \ln \sqrt{|x^2 - 1|}$$

substitute: $x^2 - 1 = s$, $2x dx = ds$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

substitute: $\ln |\cos x| = s$, $\frac{-\sin x}{\cos x} dx = ds$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2} \ln |s| = \ln \sqrt{|x^2 - 1|}$$

substitute: $x^2 - 1 = s$, $2x dx = ds$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int ds = -s = -\ln |\cos x|$$

substitute: $\ln |\cos x| = s$, $\frac{-\sin x}{\cos x} dx = ds$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2} \ln |s| = \ln \sqrt{|x^2 - 1|}$$

substituce: $x^2 - 1 = s$, $2x dx = ds$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int ds = -s = -\ln |\cos x|$$

substituce: $\ln |\cos x| = s$, $\frac{-\sin x}{\cos x} dx = ds$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \cos x}} dx$$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2} \ln |s| = \ln \sqrt{|x^2 - 1|}$$

substitute: $x^2 - 1 = s$, $2x dx = ds$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int ds = -s = - \ln |\cos x|$$

substitute: $\ln |\cos x| = s$, $\frac{-\sin x}{\cos x} dx = ds$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \cos x}} dx$$

substitute: $2 + \cos x = s$, $-\sin x dx = ds$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2} \ln |s| = \ln \sqrt{|x^2 - 1|}$$

substituce: $x^2 - 1 = s$, $2x dx = ds$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int ds = -s = -\ln |\cos x|$$

substituce: $\ln |\cos x| = s$, $\frac{-\sin x}{\cos x} dx = ds$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \cos x}} dx = - \int \frac{1}{\sqrt{s}} ds = - \int s^{-\frac{1}{2}} ds = -\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{s} = -2\sqrt{2 + \cos x}$$

substituce: $2 + \cos x = s$, $-\sin x dx = ds$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2} \ln |s| = \ln \sqrt{|x^2 - 1|}$$

substitute: $x^2 - 1 = s$, $2x dx = ds$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int ds = -s = -\ln |\cos x|$$

substitute: $\ln |\cos x| = s$, $\frac{-\sin x}{\cos x} dx = ds$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \cos x}} dx = - \int \frac{1}{\sqrt{s}} ds = - \int s^{-\frac{1}{2}} ds = -\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{s} = -2\sqrt{2 + \cos x}$$

substitute: $2 + \cos x = s$, $-\sin x dx = ds$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx$$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2} \ln |s| = \ln \sqrt{|x^2 - 1|}$$

substitute: $x^2 - 1 = s$, $2x dx = ds$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int ds = -s = -\ln |\cos x|$$

substitute: $\ln |\cos x| = s$, $\frac{-\sin x}{\cos x} dx = ds$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \cos x}} dx = - \int \frac{1}{\sqrt{s}} ds = - \int s^{-\frac{1}{2}} ds = -\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{s} = -2\sqrt{2 + \cos x}$$

substitute: $2 + \cos x = s$, $-\sin x dx = ds$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx$$

substitute: $e^x - 1 = s$, $e^x dx = ds$

Další příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2} \ln |s| = \ln \sqrt{|x^2 - 1|}$$

substitute: $x^2 - 1 = s$, $2x dx = ds$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int ds = -s = -\ln |\cos x|$$

substitute: $\ln |\cos x| = s$, $\frac{-\sin x}{\cos x} dx = ds$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \cos x}} dx = - \int \frac{1}{\sqrt{s}} ds = - \int s^{-\frac{1}{2}} ds = -\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{s} = -2\sqrt{2 + \cos x}$$

substitute: $2 + \cos x = s$, $-\sin x dx = ds$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{s+1}{\sqrt{s}} ds = \int \left(s^{\frac{1}{2}} + s^{-\frac{1}{2}} \right) ds = \frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} s^{\frac{1}{2}} (s+3) = \frac{2}{3} \sqrt{e^x - 1} (e^x + 2)$$

substitute: $e^x - 1 = s$, $e^x dx = ds$

Další příklady

$$\int x^3 e^x dx$$

Další příklady

$$\int x^3 e^x dx$$

$$u = x^3 \quad u' = 3x^2$$

$$v' = e^x \quad v = e^x$$

Další příklady

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx$$

$$\begin{array}{ll} u = x^3 & u' = 3x^2 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array}$$

Další příklady

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx$$

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^x & v = e^x \end{array}$$

Další příklady

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^x & v = e^x\end{array}$$

Další příklady

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x\end{array}$$

Další příklady

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}u = x & u' = 1 \\v' = e^x & v = e^x\end{array}$$

Další příklady

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x\end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx$$

Další příklady

$$\begin{aligned}
 \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\
 &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\
 &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x
 \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx$$

$$\begin{aligned}
 u &= \ln x & u' &= \frac{1}{x} \\
 v' &= x^2 & v &= \frac{1}{3}x^3
 \end{aligned}$$

Další příklady

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{9} x^3 (\ln x^3 - 1)$$

$$\begin{aligned} u &= \ln x & u' &= \frac{1}{x} \\ v' &= x^2 & v &= \frac{1}{3} x^3 \end{aligned}$$

Další příklady

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{9} x^3 (\ln x^3 - 1)$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx$$

Další příklady

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{9} x^3 (\ln x^3 - 1)$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx$$

substitute: $x = t^2$, $dx = 2t dt$

Další příklady

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{9} x^3 (\ln x^3 - 1)$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt$$

substitute: $x = t^2$, $dx = 2t dt$

Další příklady

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{9} x^3 (\ln x^3 - 1)$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt$$

substitute: $x = t^2$, $dx = 2t dt$

$$u = t \quad u' = 1$$

$$v' = e^t \quad v = e^t$$

Další příklady

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x\end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{9} x^3 (\ln x^3 - 1)$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt = 2 \left(t e^t - \int e^t dt \right) = 2(t - 1)e^t$$

substitute: $x = t^2$, $dx = 2t dt$

$$u = t \quad u' = 1$$

$$v' = e^t \quad v = e^t$$

Další příklady

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{9} x^3 (\ln x^3 - 1)$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt = 2 \left(t e^t - \int e^t dt \right) = 2(t - 1)e^t = 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}}$$

substitute: $x = t^2$, $dx = 2t dt$

$$u = t \quad u' = 1$$

$$v' = e^t \quad v = e^t$$

Další příklady

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{9} x^3 (\ln x^3 - 1)$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt = 2 \left(t e^t - \int e^t dt \right) = 2(t - 1)e^t = 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}}$$

$$I = \int \sin \ln x dx$$

Další příklady

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{9} x^3 (\ln x^3 - 1)$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt = 2 \left(t e^t - \int e^t dt \right) = 2(t - 1)e^t = 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}}$$

$$I = \int \sin \ln x dx$$

$$\begin{array}{ll} u = \sin \ln x & u' = \frac{1}{x} \cos \ln x \\ v' = 1 & v = x \end{array}$$

Další příklady

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{9} x^3 (\ln x^3 - 1)$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt = 2 \left(t e^t - \int e^t dt \right) = 2(t - 1)e^t = 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}}$$

$$I = \int \sin \ln x dx = x \sin \ln x - \int \cos \ln x dx$$

$$\begin{array}{ll} u = \sin \ln x & u' = \frac{1}{x} \cos \ln x \\ v' = 1 & v = x \end{array}$$

Další příklady

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{9} x^3 (\ln x^3 - 1)$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt = 2 \left(t e^t - \int e^t dt \right) = 2(t - 1)e^t = 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}}$$

$$I = \int \sin \ln x dx = x \sin \ln x - \int \cos \ln x dx$$

$$\begin{array}{ll} u = \cos \ln x & u' = -\frac{1}{x} \sin \ln x \\ v' = 1 & v = x \end{array}$$

Další příklady

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{9} x^3 (\ln x^3 - 1)$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt = 2 \left(t e^t - \int e^t dt \right) = 2(t - 1)e^t = 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sin \ln x dx = x \sin \ln x - \int \cos \ln x dx = \\ &= x \sin \ln x - \left(x \cos \ln x + \int \sin \ln x dx \right) = x \sin \ln x - x \cos \ln x - I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \cos \ln x & u' &= -\frac{1}{x} \sin \ln x \\ v' &= 1 & v &= x \end{aligned}$$

Další příklady

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - e^x) = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{9} x^3 (\ln x^3 - 1)$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt = 2 \left(t e^t - \int e^t dt \right) = 2(t - 1)e^t = 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sin \ln x dx = x \sin \ln x - \int \cos \ln x dx = \\ &= x \sin \ln x - \left(x \cos \ln x + \int \sin \ln x dx \right) = x \sin \ln x - x \cos \ln x - I \end{aligned}$$

Tedy $2I = x \sin \ln x - x \cos \ln x$, odtud $I = \frac{1}{2} x (\sin \ln x - \cos \ln x)$

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$ a F je funkce primitivní k f ,

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in (a, b).$$

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$ a F je funkce primitivní k f ,

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in (a, b).$$

Newtonův určitý integrál z funkce f v mezích od a do b je definován jako

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$ a F je funkce primitivní k f ,

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in (a, b).$$

Newtonův určitý integrál z funkce f v mezích od a do b je definován jako

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Označení: $F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^b$

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$ a F je funkce primitivní k f ,

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in (a, b).$$

Newtonův určitý integrál z funkce f v mezích od a do b je definován jako

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Označení: $F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^b = [F(x)]_a^b$

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$ a F je funkce primitivní k f ,

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in (a, b).$$

Newtonův určitý integrál z funkce f v mezích od a do b je definován jako

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Označení: $F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^b = [F(x)]_a^b$

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

- $\int_a^a f(x) dx = 0$, $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

- $\int_a^a f(x) dx = 0$, $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- Linearita vzhledem k integrované funkci:

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

- $\int_a^a f(x) dx = 0$, $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

- Linearita vzhledem k integrované funkci:

aditivita: $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

- $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

- Linearita vzhledem k integrované funkci:

aditivita: $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

homogenita: $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

- $\int_a^a f(x) dx = 0$, $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

- Linearita vzhledem k integrované funkci:

aditivita: $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

homogenita: $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$

- Aditivita vzhledem k integračnímu oboru:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

- Integrace „per partes“ pro určité integrály:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

- Integrace „per partes“ pro určité integrály:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

- Substituční metoda pro určité integrály:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s) ds$$

substitute: $\varphi(x) = s, \varphi'(x) dx = ds$

Definice a základní vlastnosti Newtonova integrálu

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

- Integrace „per partes“ pro určité integrály:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

- Substituční metoda pro určité integrály:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s) ds$$

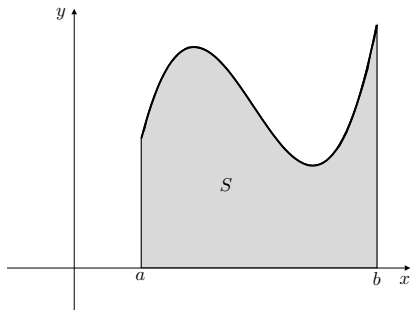
substitute: $\varphi(x) = s, \varphi'(x) dx = ds$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s))\varphi'(s) ds$$

substitute: $x = \varphi(s), \text{ tj. } \varphi^{-1}(x) = s, \varphi'(x) dx = ds$

Obsah rovinného obrazce

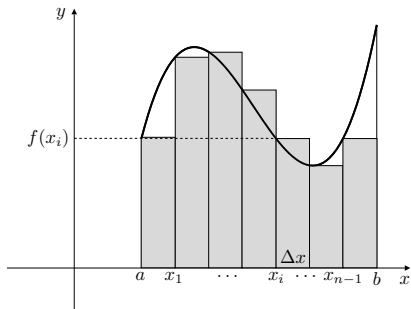
Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.



Obsah rovinného obrazce

Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$n \in \mathbb{N}$, položíme $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ a $x_i = a + i\Delta x$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.



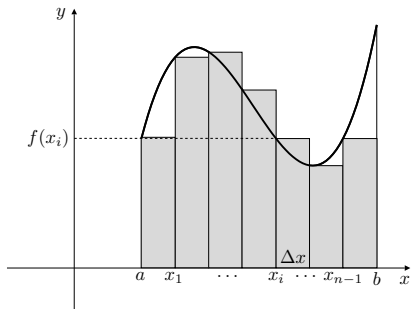
Obsah rovinného obrazce

Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$n \in \mathbb{N}$, položíme $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ a $x_i = a + i\Delta x$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Pak je

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x,$$



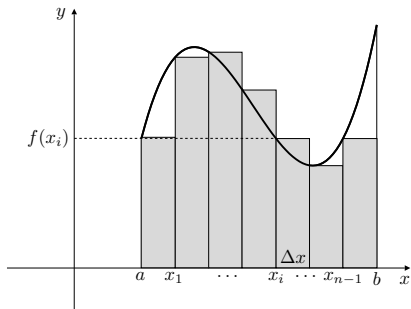
Obsah rovinného obrazce

Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$n \in \mathbb{N}$, položíme $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ a $x_i = a + i\Delta x$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Pak je

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx,$$



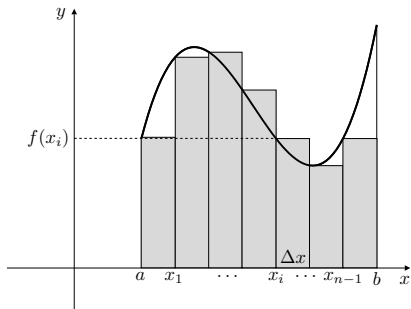
Obsah rovinného obrazce

Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$n \in \mathbb{N}$, položíme $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ a $x_i = a + i\Delta x$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Pak je

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx, \quad S = \int_a^b f(x)dx$$



Obsah rovinného obrazce

Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Příklady:

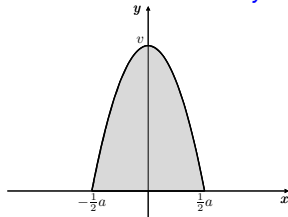
Obsah rovinného obrazce

Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Příklady:

Vypočítejte obsah parabolické úseče, která má výšku v a délku základny a .



Obsah rovinného obrazce

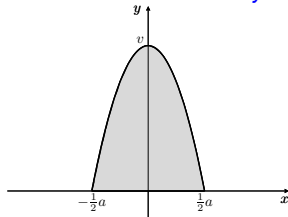
Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Příklady:

Vypočítejte obsah parabolické úseče, která má výšku v a délku základny a .

$$f(x) = v \left(1 - \frac{4}{a^2} x^2 \right)$$



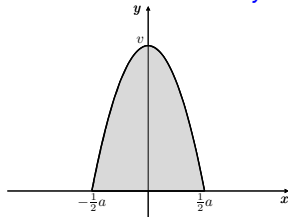
Obsah rovinného obrazce

Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Příklady:

Vypočítejte obsah parabolické úseče, která má výšku v a délku základny a .



$$f(x) = v \left(1 - \frac{4}{a^2} x^2 \right)$$

$$S = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} v \left(1 - \frac{4}{a^2} x^2 \right) dx$$

Obsah rovinného obrazce

Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

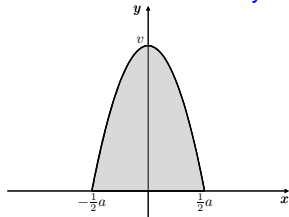
Příklady:

Vypočítejte obsah parabolické úseče, která má výšku v a délku základny a .

$$f(x) = v \left(1 - \frac{4}{a^2} x^2 \right)$$

$$S = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} v \left(1 - \frac{4}{a^2} x^2 \right) dx = v \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx - \frac{4v}{a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx = v \left[x \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} - \frac{4v}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} =$$

$$= v \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) - \frac{4v}{a^2} \left(\frac{a^3}{24} + \frac{a^3}{24} \right) = \frac{2}{3} va$$



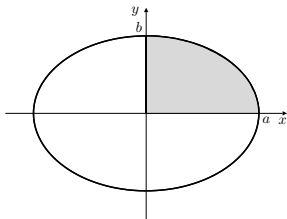
Obsah rovinného obrazce

Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Příklady:

Vypočítejte obsah elipsy s poloosami a a b .



Obsah rovinného obrazce

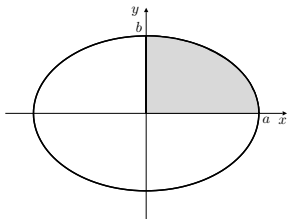
Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Příklady:

Vypočítejte obsah elipsy s poloosami a a b .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Obsah rovinného obrazce

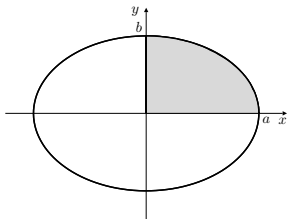
Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Příklady:

Vypočítejte obsah elipsy s poloosami a a b .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$



Obsah rovinného obrazce

Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

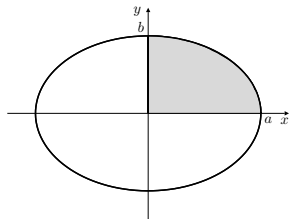
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Příklady:

Vypočítejte obsah elipsy s poloosami a a b .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$S = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$



Obsah rovinného obrazce

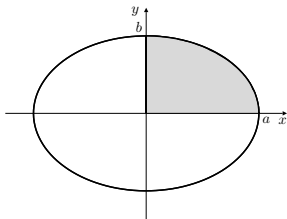
Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Příklady:

Vypočítejte obsah elipsy s poloosami a a b .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$



$$S = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (\cos s)^2 ds = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2s}{2} ds =$$

substitute: $x = a \sin s$, $dx = a \cos s ds$, $a^2 - x^2 = a^2(1 - (\sin s)^2) = a^2(\cos s)^2$

Obsah rovinného obrazce

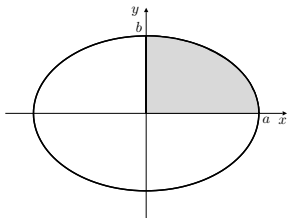
Obrazec ohraničený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$) a grafem spojitě funkce f definované na intervalu $[a, b]$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Příklady:

Vypočítejte obsah elipsy s poloosami a a b .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

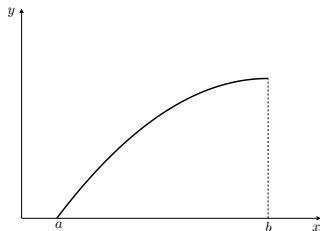


$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (\cos s)^2 ds = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2s}{2} ds = \\ &= 2ab \left[s + \frac{\sin 2s}{2} \right]_{s=0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab \end{aligned}$$

substitute: $x = a \sin s$, $dx = a \cos s ds$, $a^2 - x^2 = a^2(1 - (\sin s)^2) = a^2(\cos s)^2$

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojitě funkce na intervalu $[a, b]$.

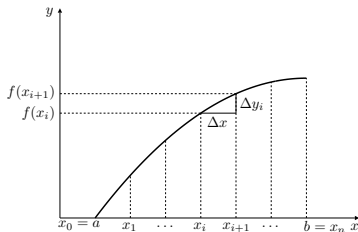


Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojitě funkce na intervalu $[a, b]$.

$$n \in \mathbb{N}, \text{ položíme } \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_0 = a, x_i = a + i\Delta x,$$

$$\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i), i = 1, 2, \dots, n.$$



Délka rovinné křivky

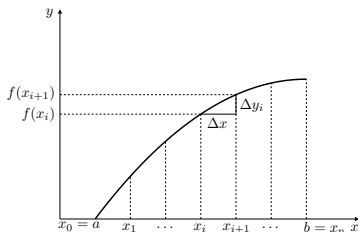
Křivka je grafem spojitě funkce na intervalu $[a, b]$.

$n \in \mathbb{N}$, položíme $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_i = a + i\Delta x$,
 $\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Pak je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_i}{\Delta x} = f'(x_i), \text{ tedy } \frac{\Delta y_i}{\Delta x} \approx f'(x_i)$$

$$\ell \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \Delta x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojitě funkce na intervalu $[a, b]$.

$n \in \mathbb{N}$, položíme $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_i = a + i\Delta x$,
 $\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Pak je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_i}{\Delta x} = f'(x_i), \text{ tedy } \frac{\Delta y_i}{\Delta x} \approx f'(x_i)$$

$$\ell \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \Delta x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \text{ tedy}$$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojitě funkce na intervalu $[a, b]$. Její délka je dána integrálem

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojitě funkce na intervalu $[a, b]$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Příklad:

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojitě funkce na intervalu $[a, b]$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Příklad: Vypočítejte délku kružnice o poloměru r .

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojitě funkce na intervalu $[a, b]$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Příklad: Vypočítejte délku kružnice o poloměru r .

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojitě funkce na intervalu $[a, b]$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Příklad: Vypočítejte délku kružnice o poloměru r .

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, (f'(x))^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojité funkce na intervalu $[a, b]$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Příklad: Vypočítejte délku kružnice o poloměru r .

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, (f'(x))^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\ell = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojitě funkce na intervalu $[a, b]$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Příklad: Vypočítejte délku kružnice o poloměru r .

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, (f'(x))^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\ell = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

substituce: $x = r \sin s, dx = r \cos s ds$

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojitě funkce na intervalu $[a, b]$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Příklad: Vypočítejte délku kružnice o poloměru r .

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, (f'(x))^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} \ell &= 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos s}{r \sqrt{1 - (\sin s)^2}} ds = \\ &= 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = 4r \frac{\pi}{2} = 2\pi r \end{aligned}$$

substituce: $x = r \sin s$, $dx = r \cos s ds$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.
Uvažujeme jeho řezy rovinami kolnými k ose x , které jsou od sebe vzdáleny o Δx .

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.
Uvažujeme jeho řezy rovinami kolnými k ose x , které jsou od sebe vzdáleny o Δx .

Nechť roviny protínají osu x v bodech $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$.
Přitom $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, celé těleso se nachází mezi 0-tou a n -tou rovinou.

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.
Uvažujeme jeho řezy rovinami kolnými k ose x , které jsou od sebe vzdáleny o Δx .

Nechť roviny protínají osu x v bodech $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$.
Přitom $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, celé těleso se nachází mezi 0-tou a n -tou rovinou.
Obsah řezu (průniku) tělesa i -tou rovinou označíme $S(x_i)$.

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.
Uvažujeme jeho řezy rovinami kolnými k ose x , které jsou od sebe vzdáleny o Δx .

Nechť roviny protínají osu x v bodech $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$.
Přitom $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, celé těleso se nachází mezi 0-tou a n -tou rovinou.

Obsah řezu (průniku) tělesa i -tou rovinou označíme $S(x_i)$.

Objem (tenké) vrstvy tělesa mezi $(i - 1)$ -ní a i -tou rovinou je přibližně roven $S(x_i)\Delta x$.

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.
Uvažujeme jeho řezy rovinami kolnými k ose x , které jsou od sebe vzdáleny o Δx .

Nechť roviny protínají osu x v bodech $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$.
Přitom $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, celé těleso se nachází mezi 0-tou a n -tou rovinou.

Obsah řezu (průniku) tělesa i -tou rovinou označíme $S(x_i)$.

Objem (tenké) vrstvy tělesa mezi $(i - 1)$ -ní a i -tou rovinou je přibližně roven $S(x_i)\Delta x$.

Pro objem tělesa tedy platí: $V \approx \sum_{i=1}^n S(x_i)\Delta x$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.
Uvažujeme jeho řezy rovinami kolnými k ose x , které jsou od sebe vzdáleny o Δx .

Nechť roviny protínají osu x v bodech $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$.
Přitom $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, celé těleso se nachází mezi 0-tou a n -tou rovinou.

Obsah řezu (průniku) tělesa i -tou rovinou označíme $S(x_i)$.

Objem (tenké) vrstvy tělesa mezi $(i - 1)$ -ní a i -tou rovinou je přibližně roven $S(x_i)\Delta x$.

Pro objem tělesa tedy platí: $V \approx \sum_{i=1}^n S(x_i)\Delta x$

Limitním přechodem $n \rightarrow \infty$ dostaneme

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Příklad: Vypočítejte objem trojosého elipsoidu s poloosami a, b, c .

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Příklad: Vypočítejte objem trojosého elipsoidu s poloosami a, b, c .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Příklad: Vypočítejte objem trojosého elipsoidu s poloosami a, b, c .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Obvodová křivka řezu rovinou kolmou k ose x : $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, tj.

$$\frac{y^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2} + \frac{z^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) c^2} = 1$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Příklad: Vypočítejte objem trojosého elipsoidu s poloosami a, b, c .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Obvodová křivka řezu rovinou kolmou k ose x : $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, tj.

$$\frac{y^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2} + \frac{z^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) c^2} = 1$$

$$S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Příklad: Vypočítejte objem trojosého elipsoidu s poloosami a, b, c .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Obvodová křivka řezu rovinou kolmou k ose x : $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, tj.

$$\frac{y^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2} + \frac{z^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) c^2} = 1$$

$$S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$V = 2 \int_0^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a = 2\pi bc \left(a - \frac{a^3}{3a^2} \right) = \frac{4}{3} \pi abc$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Speciální případ: těleso vzniklé rotací „podgrafu“ funkce $y = f(x)$ definované na intervalu $[a, b]$ kolem osy x .

$S(x) = \pi(f(x))^2$, tj.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int_0^b (f(x))^2 dx$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

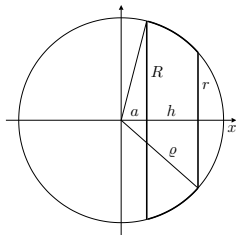
$$V = \pi \int_0^b (f(x))^2 dx$$

Příklad:

Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r .

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int_0^b (f(x))^2 dx$$



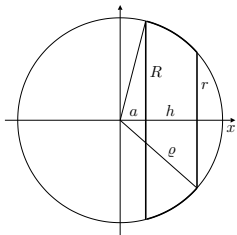
Příklad:

Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r .

$$V = \pi \int_a^{a+h} (\rho^2 - x^2) dx$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int_0^b (f(x))^2 dx$$



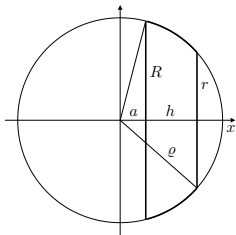
Příklad:

Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r .

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^{a+h} (\varrho^2 - x^2) dx = \pi \left(\varrho^2 [x]_a^{a+h} - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_a^{a+h} \right) = \\ &= \pi \left(\varrho^2 h - \frac{1}{3} (3a^2 h + 3ah^2 + h^3) \right) \end{aligned}$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int_0^b (f(x))^2 dx$$



Příklad:

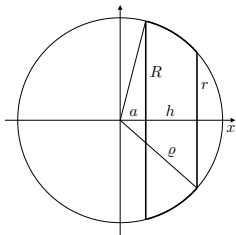
Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r .

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^{a+h} (\varrho^2 - x^2) dx = \pi \left(\varrho^2 [x]_a^{a+h} - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_a^{a+h} \right) = \\ &= \pi \left(\varrho^2 h - \frac{1}{3} (3a^2 h + 3ah^2 + h^3) \right) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \varrho^2 - R^2 \\ (a+h)^2 &= \varrho^2 - r^2 \end{aligned} \right\}$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int_0^b (f(x))^2 dx$$



Příklad:

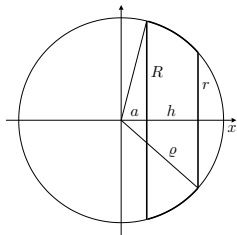
Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r .

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^{a+h} (\varrho^2 - x^2) dx = \pi \left(\varrho^2 [x]_a^{a+h} - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_a^{a+h} \right) = \\ &= \pi \left(\varrho^2 h - \frac{1}{3} (3a^2 h + 3ah^2 + h^3) \right) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \varrho^2 - R^2 \\ (a+h)^2 &= \varrho^2 - r^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2ah + h^2 = R^2 - r^2$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int_0^b (f(x))^2 dx$$



Příklad:

Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r .

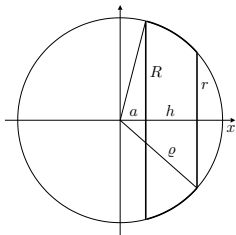
$$V = \pi \int_a^{a+h} (\varrho^2 - x^2) dx = \pi \left(\varrho^2 [x]_a^{a+h} - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_a^{a+h} \right) =$$

$$= \pi \left(\varrho^2 h - \frac{1}{3} (3a^2 h + 3ah^2 + h^3) \right)$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \varrho^2 - R^2 \\ (a+h)^2 &= \varrho^2 - r^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2ah + h^2 = R^2 - r^2 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{R^2 - r^2 - h^2}{2h} \\ \varrho^2 = \frac{(R^2 - r^2 - h^2)^2}{4h^2} + R^2 \end{cases}$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int_0^b (f(x))^2 dx$$



Příklad:

Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r .

$$V = \pi \int_a^{a+h} (\varrho^2 - x^2) dx = \pi \left(\varrho^2 [x]_a^{a+h} - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_a^{a+h} \right) =$$

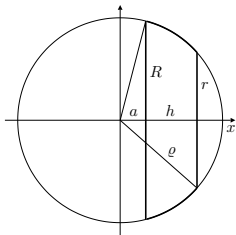
$$= \pi \left(\varrho^2 h - \frac{1}{3} (3a^2 h + 3ah^2 + h^3) \right)$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \varrho^2 - R^2 \\ (a+h)^2 &= \varrho^2 - r^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2ah + h^2 = R^2 - r^2 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{R^2 - r^2 - h^2}{2h} \\ \varrho^2 = \frac{(R^2 - r^2 - h^2)^2}{4h^2} + R^2 \end{cases}$$

Celkem: $V = \frac{1}{6} \pi h (3(R^2 + r^2) + h^2)$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int_0^b (f(x))^2 dx$$



Příklad:

Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r .

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^{a+h} (\varrho^2 - x^2) dx = \pi \left(\varrho^2 [x]_a^{a+h} - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_a^{a+h} \right) = \\
 &= \pi \left(\varrho^2 h - \frac{1}{3} (3a^2 h + 3ah^2 + h^3) \right) \\
 \left. \begin{aligned} a^2 &= \varrho^2 - R^2 \\ (a+h)^2 &= \varrho^2 - r^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2ah + h^2 = R^2 - r^2 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{R^2 - r^2 - h^2}{2h} \\ \varrho^2 = \frac{(R^2 - r^2 - h^2)^2}{4h^2} + R^2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Celkem: $V = \frac{1}{6} \pi h (3(R^2 + r^2) + h^2)$

Specielně – Kulová úseč ($r = 0$): $V = \frac{1}{6} \pi h (3R^2 + h^2)$

Polokoule ($r = 0, h = R$): $V = \frac{2}{3} \pi R^3$

**MASARYKOVA
UNIVERZITA**