Matematika II

Posloupnosti

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

15. března 2023

Obsah

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\{k, k+1, k+2, \dots\}$; obvykle $k = 0$ nebo $k = 1$.

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\{k, k+1, k+2, \ldots\}$; obvykle $k = 0$ nebo $k = 1$.

Označení: a posloupnost, $n \in \mathrm{Dom}(a)$.
$a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\{k, k+1, k+2, \ldots\}$;
obvykle $k = 0$ nebo $k = 1$.

Označení: a posloupnost, $n \in \mathrm{Dom}(a)$.
$a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti: $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\{k, k+1, k+2, \ldots\}$;
obvykle $k = 0$ nebo $k = 1$.

Označení: a posloupnost, $n \in \mathrm{Dom}(a)$.
$a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti: $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$

Vlastnosti:
- • ohraničenost
- • periodicita (s přirozenou periodou)
- ○ monotonnost

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\{k, k+1, k+2, \dots\}$; obvykle $k = 0$ nebo $k = 1$.

Označení: a posloupnost, $n \in \mathrm{Dom}(a)$.
$a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti: $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$

Vlastnosti:
- ohraničenost
- periodicita (s přirozenou periodou)
- ◦ monotonnost

Operace skládání není obecně definována.

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\{k, k+1, k+2, \dots\}$;
obvykle $k = 0$ nebo $k = 1$.

Označení: a posloupnost, $n \in \mathrm{Dom}(a)$.
$a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti: $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$

Vlastnosti:
- ohraničenost
- periodicita (s přirozenou periodou)
- ◦ monotonnost

Operace skládání není obecně definována.

Zadávání posloupnosti:
- obecným předpisem
- rekurentně

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\{k, k+1, k+2, \dots\}$;
obvykle $k = 0$ nebo $k = 1$.

Označení: a posloupnost, $n \in \mathrm{Dom}(a)$.
$a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti: $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$

Vlastnosti:
- ohraničenost
- periodicita (s přirozenou periodou)
- ◦ monotonnost

Operace skládání není obecně definována.

Zadávání posloupnosti:
- obecným předpisem
- rekurentně

Rekurentní zápis posloupnosti: předpis pro výpočet obecného členu posloupnosti pomocí předchozího (nebo několika předchozích) současně se zadáním počátečního členu (nebo několika počátečních členů)

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$

$d > 0$ neohraničená ryze rostoucí
$d < 0$ neohraničená ryze klesající,

$d = 0$ ohraničená stacionární

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$

$q > 1,\ a_0 \neq 0$	neohraničená, $a_0 > 0$ ryze rostoucí, $a_0 < 0$ ryze klesající
$q = 1$	ohraničená (stacionární)
$0 < q < 1,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, $a_0 > 0$ ryze klesající, $a_0 < 0$ ryze rostoucí
$q = 0,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, $a_0 > 0$ klesající, $a_0 < 0$ rostoucí
$-1 < q < 0,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, „tlumené oscilace“
$q = -1,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, periodická s periodou 2
$q < -1,\ a_0 \neq 0$	neohraničená, „netlumené oscilace“

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$	$\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$	$\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	

---

pro „velká“ n „se chová“ jako geometrická s kvocientem $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$
a s počátečním členem $\frac{1}{10}(5+\sqrt{5})$

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1, a_1 = 1$	$\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	
logistická	$a_{n+1} = ra_n\left(1 - \frac{r-1}{r}\frac{a_n}{K}\right)$		r – růstový koeficient, K – kapacita (úživnost)

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1, a_1 = 1$	$\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	
logistická	$a_{n+1} = ra_n\left(1 - \dfrac{r-1}{r}\dfrac{a_n}{K}\right)$		r – růstový koeficient, K – kapacita (úživnost)

$$r = 2,\ K = \tfrac{1}{2},\ a_{n+1} = 2a_n(1-a_n):\ a_n = \tfrac{1}{2}\left(1 - (1-2a_0)^{2^n}\right)$$

$$r = 4,\ K = \tfrac{3}{4},\ a_{n+1} = 4a_n(1-a_n):\ a_n = \left[\sin\left(2^n \arcsin\sqrt{a_0}\right)\right]^2$$

Hromadné body posloupnosti

$\kappa \in \mathbb{R}$ je *hromadný bod posloupnosti* $\{a_n\}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{Z})(\exists m \in \mathbb{Z})\, m \geq n \wedge |a_m - \kappa| < \varepsilon$$

Příklady:

- $\left\{\frac{3}{4}n\right\}$ nemá hromadné body.
- $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}$ má jediný hromadný bod 0.
- $\left\{(-1)^n\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right\}$ má dva hromadné body 1 a -1.
- Každé nezáporné celé číslo je hromadným bodem posloupnosti $\{0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Každé reálné číslo z intervalu $[0, 1]$ je hromadným bodem posloupnosti $\{1, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots\}$.

Množina všech hromadných bodů posloupnosti je uzavřená.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená, pak existuje její hromadný bod.

Limita posloupnosti

Je-li množina hromadných bodů posloupnosti jednoprvková, nazveme tento hromadný bod *limitou posloupnosti*.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha : \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{Z})(\forall n \in \mathbb{Z})\, n > n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

Pokud existuje limita posloupnosti $\{a_n\}$, řekneme, že tato posloupnost je *konvergentní*.

Vlastnosti limity

nezávislé na uspořádání reálných čísel

Vlastnosti limity

nezávislé na uspořádání reálných čísel

- Existuje nejvýše jedna limita dané posloupnosti.

Vlastnosti limity

nezávislé na uspořádání reálných čísel

- Existuje nejvýše jedna limita dané posloupnosti.
- Konvergentní posloupnost je ohraničená.

Vlastnosti limity

nezávislé na uspořádání reálných čísel

- Existuje nejvýše jedna limita dané posloupnosti.
- Konvergentní posloupnost je ohraničená.
- Posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je *Cauchyovská,*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N})\ \min\{n_1, n_2\} > n_0 \Rightarrow |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon.$$

Vlastnosti limity

nezávislé na uspořádání reálných čísel

- Existuje nejvýše jedna limita dané posloupnosti.
- Konvergentní posloupnost je ohraničená.
- Posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je *Cauchyovská,*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N})\ \min\{n_1, n_2\} > n_0 \Rightarrow |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon.$$

- Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ konvergentní pak
  - $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pro každé číslo c,

    $\lim\limits_{n\to\infty}$ je homogenní zobrazení množiny konvergentních posloupností do množiny čísel,
  - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

    $\lim\limits_{n\to\infty}$ je aditivní zobrazení množiny konvergentních posloupností do množiny čísel;

  tj. $\lim\limits_{n\to\infty}$ je lineární zobrazení množiny konvergentních posloupností do množiny čísel.

Vlastnosti limity

nezávislé na uspořádání reálných čísel

- Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ konvergentní pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

Vlastnosti limity
nezávislé na uspořádání reálných čísel

- Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ konvergentní pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

- Je-li posloupnosti $\{a_n\}$ konvergentní, pak
    - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$,
    - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$.

Vlastnosti limity

nezávislé na uspořádání reálných čísel

- Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ konvergentní pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

- Je-li posloupnosti $\{a_n\}$ konvergentní, pak
    - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$,
    - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ pro každé $k > 0$,

  $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pro každé q takové, že $|q| < 1$.

Vlastnosti limity

využívající uspořádání reálných čísel

Vlastnosti limity

využívající uspořádání reálných čísel

- Je-li posloupnost $\{a_n\}$ monotonní a ohraničená, pak je konvergentní.

Vlastnosti limity

využívající uspořádání reálných čísel

- Je-li posloupnost $\{a_n\}$ monotonní a ohraničená, pak je konvergentní. Podrobněji:
  - Je-li $\{a_n\}$ rostoucí a ohraničená shora, pak
    $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \operatorname{Dom} a\}$
  - Je-li $\{a_n\}$ klesající a ohraničená zdola, pak
    $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \operatorname{Dom} a\}$

Vlastnosti limity

využívající uspořádání reálných čísel

- Je-li posloupnost $\{a_n\}$ monotonní a ohraničená, pak je konvergentní. Podrobněji:
  - Je-li $\{a_n\}$ rostoucí a ohraničená shora, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \operatorname{Dom} a\}$
  - Je-li $\{a_n\}$ klesající a ohraničená zdola, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \operatorname{Dom} a\}$
- Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ a pro všechny členy posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ od jistého indexu počínaje platí $a_n < b_n$, pak $\alpha \leq \beta$.

Vlastnosti limity

využívající uspořádání reálných čísel

- Je-li posloupnost $\{a_n\}$ monotonní a ohraničená, pak je konvergentní. Podrobněji:
  - Je-li $\{a_n\}$ rostoucí a ohraničená shora, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathrm{Dom}\, a\}$
  - Je-li $\{a_n\}$ klesající a ohraničená zdola, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathrm{Dom}\, a\}$
- Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ a pro všechny členy posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ od jistého indexu počínaje platí $a_n < b_n$, pak $\alpha \le \beta$.
- Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ a pro všechny členy posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ od jistého indexu počínaje platí $a_n \le c_n \le b_n$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$.

Nevlastní limity

Posloupnost $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ *diverguje do nekonečna.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty : \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n > H$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ *diverguje do minus nekonečna.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty : \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n < H$$

Nevlastní limita není limita.

Vlastnosti nevlastní limity

Vlastnosti nevlastní limity

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.

Vlastnosti nevlastní limity

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.

- Divergentní posloupnost je neohraničená.

Vlastnosti nevlastní limity

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.

- Divergentní posloupnost je neohraničená.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = -\infty$

Vlastnosti nevlastní limity

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.

- Divergentní posloupnost je neohraničená.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty$

Vlastnosti nevlastní limity

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.

- Divergentní posloupnost je neohraničená.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty,\quad \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$

Vlastnosti nevlastní limity

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ a_n > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$

  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ a_n < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = -\infty$

Reálná čísla

Množina $\mathbb{R}$ s operacemi $+, \cdot$ a s relací $<$

$(x+y)+z = x+(y+z)$ $x+y = y+z$ $(\exists 0)(\forall x)\ x+0 = x$ $(\forall x)(\exists -x)\ x+(-x) = 0$	$(\mathbb{R},+)$ je abelovská grupa
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $x \cdot y = y \cdot z$ $(\exists 1 \neq 0)(\forall x)\ 1x = x$ $(\forall x \neq 0)(\exists x^{-1})\ x^{-1} \cdot x = 1$	$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je abelovská grupa
$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$	$(\mathbb{R},+,\cdot)$ je pole
$x<y$ a $y<z \ \Rightarrow x<z$ $x<y$ nebo $y<x$ nebo $x=y$	lineární uspořádání
$x<y \ \Rightarrow x+z<y+z$ $x<y$ a $0<z \ \Rightarrow \ x \cdot z < y \cdot z$	$(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ je uspořádané pole

$$(\forall A \subseteq \mathbb{R})\ \big[(\exists H)(\forall x \in A)\, x \leq H\big] \Rightarrow (\exists s)\, s = \sup A$$

množina $\mathbb{R}$ tvoří kontinuum

Rozšířená množina reálných čísel

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Rozšířená množina reálných čísel

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

- $(\forall x \in \mathbb{R}) - \infty < x < \infty$

Rozšířená množina reálných čísel

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ -\infty < x < \infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, c + \infty = \infty \wedge c + (-\infty) = c - \infty = -\infty$

Rozšířená množina reálných čísel

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \; -\infty < x < \infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, c + \infty = \infty \wedge c + (-\infty) = c - \infty = -\infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, \big(c > 0 \Rightarrow c \cdot \infty = \infty\big) \wedge \big(c < 0 \Rightarrow c \cdot \infty = -\infty\big)$

Rozšířená množina reálných čísel

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ -\infty < x < \infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, c + \infty = \infty \wedge c + (-\infty) = c - \infty = -\infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, (c > 0 \Rightarrow c \cdot \infty = \infty) \wedge (c < 0 \Rightarrow c \cdot \infty = -\infty)$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, \dfrac{c}{\infty} = \dfrac{c}{-\infty} = 0$

Rozšířená množina reálných čísel

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ -\infty < x < \infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, c + \infty = \infty \wedge c + (-\infty) = c - \infty = -\infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\ (c > 0 \Rightarrow c \cdot \infty = \infty) \wedge (c < 0 \Rightarrow c \cdot \infty = -\infty)$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\ \dfrac{c}{\infty} = \dfrac{c}{-\infty} = 0$
- $\left|\dfrac{1}{0}\right| = \infty$

Rozšířená množina reálných čísel

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \ -\infty < x < \infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, c + \infty = \infty \wedge c + (-\infty) = c - \infty = -\infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, \big(c > 0 \Rightarrow c \cdot \infty = \infty\big) \wedge \big(c < 0 \Rightarrow c \cdot \infty = -\infty\big)$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, \dfrac{c}{\infty} = \dfrac{c}{-\infty} = 0$
- $\left|\dfrac{1}{0}\right| = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$

Rozšířená množina reálných čísel

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

- $(\forall x \in \mathbb{R}) - \infty < x < \infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, c + \infty = \infty \wedge c + (-\infty) = c - \infty = -\infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, \big(c > 0 \Rightarrow c \cdot \infty = \infty\big) \wedge \big(c < 0 \Rightarrow c \cdot \infty = -\infty\big)$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, \dfrac{c}{\infty} = \dfrac{c}{-\infty} = 0$
- $\left|\dfrac{1}{0}\right| = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty, \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty, (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Rozšířená množina reálných čísel

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \; -\infty < x < \infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, c + \infty = \infty \wedge c + (-\infty) = c - \infty = -\infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, \big(c > 0 \Rightarrow c \cdot \infty = \infty\big) \wedge \big(c < 0 \Rightarrow c \cdot \infty = -\infty\big)$
- $(\forall c \in \mathbb{R})\, \dfrac{c}{\infty} = \dfrac{c}{-\infty} = 0$
- $\left|\dfrac{1}{0}\right| = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty,\ \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty,\ (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Neurčité výrazy: $\dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$

Rozšířená množina reálných čísel

Okolí bodů

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$:

$$\mathcal{O}(a) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : \; a - \varepsilon_1 < x < a + \varepsilon_2\}, & a \in \mathbb{R}, \\ \{x \in \mathbb{R} : \; h < x\}, & a = \infty, \\ \{x \in \mathbb{R} : \; h > x\}, & a = -\infty. \end{cases}$$

Pravé okolí:

$$\mathcal{O}_+(a) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : \; x \leq a + \varepsilon\}, & a \in \mathbb{R}, \\ \{x \in \mathbb{R} : \; h > x\}, & a = -\infty. \end{cases}$$

Levé okolí:

$$\mathcal{O}_-(a) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : \; a - \varepsilon \leq x\}, & a \in \mathbb{R}, \\ \{x \in \mathbb{R} : \; h < x\}, & a = \infty. \end{cases}$$

Přitom $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, h \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$.

Rozšířená množina reálných čísel

Definice limity

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}^* : \ \big(\forall \mathcal{O}(\alpha)\big)\big(\exists \mathcal{O}(\infty)\big)\big(\forall n \in \mathbb{Z}\big)\ n \in \mathcal{O}(\infty) \Rightarrow a_n \in \mathcal{O}(\alpha)$$

Diference a její význam

První diference vpřed: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

Diference a její význam

První diference vpřed: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$(\forall n)\Delta a_n > 0 \Rightarrow$ posloupnost je ryze rostoucí,
$(\forall n)\Delta a_n < 0 \Rightarrow$ posloupnost je ryze klesající
$(\forall n)\Delta a_n \geq 0 \Rightarrow$ posloupnost je rostoucí (neklesající)
$(\forall n)\Delta a_n \leq 0 \Rightarrow$ posloupnost je klesající (nerostoucí)

Diference a její význam

První diference vpřed: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$(\forall n)\Delta a_n > 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je ryze rostoucí,
$(\forall n)\Delta a_n < 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je ryze klesající
$(\forall n)\Delta a_n \geq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je rostoucí (neklesající)
$(\forall n)\Delta a_n \leq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je klesající (nerostoucí)

Δa_n lze chápat jako n-tý člen nějaké posloupnosti;
diferenci Δ lze chápat jako zobrazení množiny posloupností do sebe.

Diference a její význam

První diference vpřed: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$(\forall n)\Delta a_n > 0 \ \Rightarrow$ posloupnost je ryze rostoucí,
$(\forall n)\Delta a_n < 0 \ \Rightarrow$ posloupnost je ryze klesající
$(\forall n)\Delta a_n \geq 0 \ \Rightarrow$ posloupnost je rostoucí (neklesající)
$(\forall n)\Delta a_n \leq 0 \ \Rightarrow$ posloupnost je klesající (nerostoucí)

Δa_n lze chápat jako n-tý člen nějaké posloupnosti;
diferenci Δ lze chápat jako zobrazení množiny posloupností do sebe.

Rekurentní formuli lze přepsat pomocí diference:

Příklad:

$$a_{n+1} = ra_n\left(1 - \frac{r-1}{r}\frac{a_n}{K}\right)$$

$$a_{n+1} - a_n = ra_n - (r-1)\frac{a_n^2}{K} - a_n$$

$$\Delta a_n = (r-1)a_n\left(1 - \frac{a_n}{K}\right)$$

MASARYKOVA
UNIVERZITA